Nazwisko i imię	Nr albumu	2009 D

1. Sprawdzić, czy zbiór R^2 jest przestrzenią wektorową, gdy dla dowolnych wektorów (x, y) i (x', y') i skalara α jest $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$ oraz $\alpha \odot (x, y) = (\alpha y, \alpha x)$.

2. Wyznaczyć wektor $[\mathbf{x}]_B$, gdy $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ i bazą jest $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$, gdzie $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Przedstawić swoje wyliczenia.

3. Dana jest przestrzeń wektorowa V z bazą $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i przekształcenie liniowe $T\colon V \to V$ takie, że $T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, $T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$ i $T(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$. Wyznaczyć macierz $[T]_B$ przekształcenia T względem bazy B. Czy przekształcenie T jest odwracalne? Obliczyć $T^{-1}(\mathbf{b}_1)$.

4. Wyznaczyć wartości własne macierzy $\mathbf{A}^2$ i $\mathbf{A}^{-1}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

5. Za pomocą transformaty Laplace'a rozwiązać równanie $y'' + y' = x^2 + 2x$, gdy $y(0) = 4$ i $y'(0) = -2$.

6. Wyznaczyć bazę ortogonalną przestrzeni R^4 zawierającą wektory $(2, 1, -5, 0)$ $(3, -1, 1, 0)$.

7. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą wymiaru 4×4 z wartościami własnymi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. (a) Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ zapisać przy pomocy potęg macierzy $\mathbf{A}$. (b) Pokazać, że $\mathbf{A}^6 = 36\mathbf{A}^3 - 51\mathbf{A}^2 - 36\mathbf{A} + 52\mathbf{I}$.