

1. Liczbę $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{18}$ zapisać w postaci kanonicznej.

2. Rozwiązać równanie $x^2 - (1 - 5j)x - 6 - 3j = 0$.

3. Obliczyć wyznacznik
$$\begin{vmatrix} j & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & j \end{vmatrix}.$$

4. Rozwiązać równanie $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

5. Wyznaczyć wymiar i ortogonalną bazę podprzestrzeni $V = \{(x+2y+4z, x+2z, y+z, x-2y) : x, y, z \in R\}$ (przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym).

6. Dane jest przekształcenie liniowe $T : R^4 \rightarrow R^3$, gdzie $T(1, 0, 1, 0) = (1, 2, -1)$, $T(1, 2, 3, -1) = (2, 1, 1)$ i $T(x, y, 0, 0) = (0, 0, 0)$ dla $x, y \in R$. Wyznaczyć $T(1, 2, 0, -1)$.

7. Rozwiązać równanie różniczkowe $y'' - 2y' + 2y = 5e^{-x} \sin 2x$.

8. Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć funkcje $x(t)$ i $y(t)$ takie, że $x'(t) = 4x + 7y$, $y'(t) = x - 2y$ i $x(0) = 7$ oraz $y(0) = -1$.

9. Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

- Układ równań liniowych, w którym jest więcej równań niż niewiadomych ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- Macierz kwadratowa \mathbf{A} jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz \mathbf{A}^2 jest odwracalna.
- Jeśli W i U są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V , to $W \cap U$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .
- Jeśli \mathbf{A} jest macierzą kwadratową, to $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})^2$.
- Każdy układ równań liniowych, w którym liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ma co najmniej jedno rozwiązanie.
- Jeśli $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ należy do podprzestrzeni W przestrzeni V , to \mathbf{v} i \mathbf{u} należą do W .
- Nierówność $|\sin z| \leq 1$ jest prawdziwa dla każdej liczby zespolonej z .
- Funkcja $T : R^3 \rightarrow R^3$ jest przekształceniem liniowym, gdy $T(x, y, z) = (0, x + z, xy)$ dla $(x, y, z) \in R^3$.