Nazwisko i imię

Nr grupy

2003/04 D

1. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = (3-2j)^8$.

2. Znaleźć pierwiastki wielomianu $\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x - 26$ wiedząc, że $\varphi(3+2j) = 0$.

3. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą t z układu równań $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Znaleźć bazę B przestrzeni wierszowej i bazę C przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczyć iloczyny skalarne $(\mathbf{b}_i|\mathbf{c}_j)$ dla $\mathbf{b}_i \in B$ i $\mathbf{c}_j \in C$.

7. Dla jakich $p \in R$ zachodzi równość $\dim\left(\mathcal{L}\left((1,3,p,1),(p,-1,1,1),(4,5,5,3)\right)\right) = p$?

8. Dane jest przekształcenie liniowe $T : R^4 \to R^3$, gdzie $T(1,1,1,1) = (1,3,3)$, $T(1,0,1,0) = (1,1,-3)$ i $\operatorname{Ker} T = \{(0,0,z,t) : z,t \in R\}$. Wyznaczyć $T(2,1,3,3)$.

9. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y'' + 3y' = 54xe^{-3x}$.

10. Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć funkcje $x(t)$ i $y(t)$ takie, że $x'(t) = -y$, $y'(t) = 2x + 2y$ i $x(0) = 1$ oraz $y(0) = 1$.

11. Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

- Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami takimi, że $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, to koniecznie $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
- Jeśli $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, to $\mathbf{A}^k = \mathbf{I}$ dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = (\det \mathbf{A})^2$.
- Niech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ będą macierzami. Czy z równości $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ wynika równość $\mathbf{A} = \mathbf{B}$?
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną wymiaru $n \times n$ i $\mathbf{A}^2 = [b_{ij}]$, to $b_{ii} \geqslant 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.
- Jeśli $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ i dwie spośród macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ są kwadratowe, to i trzecia jest kwadratowa.
- Dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ i liczby α jest $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.
- Dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ jest $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.

Odpowiedzi: (1) $x_1 = 5 - 12j$, $x_2 = 12 + 5j$, $x_3 = -5 + 12j$ i $x_4 = 12 + 5j$; (2) $x_1 = 3 - 2j$, $x_2 = 3 + 2j$, $x_3 = \sqrt{2}$ i $x_4 = -\sqrt{2}$; (3) $t = -1$; (4) $\mathbf{X} = 1/8 \begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$; (5) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{X}_1 = (-1, 1)$ i $\mathbf{x}_2 = (1, 1)$; (6) $B = (\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{b}_2 = (0, 1, 2))$ $C = (\mathbf{c}_1 = (1, 2, -1))$ i $(\mathbf{b}_i|\mathbf{c}_j) = 0$; (7) $p = 2$ i $p = 3$; (8) $T(2, 1, 3, 3) = (2, 4, 0)$; (9) $y = c_1 + c_2e^{-3x} - (9x^2 + 6x)e^{-3x}$; (10) $x = e^t(\cos t - 2\sin t)$ i $y = e^t(\cos t + 3\sin t)$.