Nazwisko i imię	Nr grupy	2003/04 C

1. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = -27j$.

2. Znaleźć pierwiastki wielomianu $\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$ wiedząc, że $\varphi(2-j) = 0$.

3. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą z z układu równań $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ y + 2z + 3t = -2 \end{cases}$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & 40 \\ -12 & -19 \end{bmatrix}$.

6. Wiadomo, że $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ jest bazą przestrzeni V. Czy z tego wynika, że B jest bazą przestrzeni $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, 3\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_3)$?

7. Uzasadnić, że zbiór $S_{n\times n}$ macierzy symetrycznych stopnia n jest przestrzenią wektorową. Wskazać bazę tej przestrzeni dla $n = 2$.

8. Dane jest przekształcenie liniowe $T : R^3 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z) = (x + y + 4z, x + 4y + z, x - 2y + 7z)$. Wyznaczyć $\dim \operatorname{Ker} T$ i $\dim \operatorname{Im} T$. Czy wektor $(1, 2, 3)$ należy do $\operatorname{Im} T$?

9. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y'' + y = \sin x - \cos x$.

10. Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć funkcje $x(t)$ i $y(t)$ takie, że $x'(t) - y'(t) = -\sin t$, $x'(t) + y'(t) = \cos t$ i $x(0) = 1/2$ oraz $y(0) = -1/2$.

11. Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

- Jeśli macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równe, to dla każdej macierzy $\mathbf{C}$ jest $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$.
- Jeśli dla macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ jest $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, to także jest $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi takimi, że $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, to także $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową i $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, to $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ lub $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi stopnia n, to $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$.
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia n i r jest liczbą rzeczywistą, to $\det(r\mathbf{A}) = r^n \det \mathbf{A}$ i $\operatorname{tr}(r\mathbf{A}) = r\operatorname{tr}(\mathbf{A})$.
- Każda macierz elementarna jest nieosobliwa.
- Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{A} > 0$.

Odpowiedzi: (1) $x_1 = 3j$, $x_2 = -3\sqrt{3}/2 - 3/2j$, $x_3 = 3\sqrt{3}/2 - 3/2j$; (2) $x_1 = 2 - j$, $x_2 = 2 + j$, $x_3 = 1 + 2j$ i $x_4 = 1 - 2j$; (3) $z = -1$; (4) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (5) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{X}_1 = (-5, 3)$ i $\mathbf{x}_2 = (-2, 1)$; (6) Nie; (7) Wystarczy zauważyć, że kombinacja liniowa macierzy symetrycznych jest macierzą symetryczną. Bazą tej przestrzeni jest układ $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$; (8) $\dim \mathrm{Ker}T = 1$, $\dim \mathrm{Im}T = 2$ i $(1, 2, 3) \notin \mathrm{Im}T$; (9) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x/2(\cos x + \sin x)$; (10) $x = 1/2(\sin t + \cos t)$ i $y = 1/2(\sin t - \cos t)$.