Nazwisko i imię

Nr grupy

2003/04 B

1. Obliczyć $\operatorname{Im}\left(\dfrac{(1+j)^{200}j^{102}}{(1+j\sqrt{3})^{100}}\right)$.

2. Rozwiązać równanie $x^2+(1+4j)x-(5+j)=0$.

3. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą y z układu równań $\begin{cases} x+\ y+\ z+\ t=0 \\ \quad y+\ z+\ t=1 \\ x+2y+3z\quad =2 \\ \quad y+2z+3t=-2 \end{cases}$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{X}$.

5. Pokazać, że $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

6. Wyznaczyć te wartości x, dla których wektory $(1,0,2,1,2)$, $(2,1,1,2,1)$ i $(5,1,7,5,x)$ są liniowo zależne.

7. Uzasadnić, że zbiór $S = \{\varphi(x) \in R[x] : \varphi(1)\varphi'(2) = 0\}$ nie jest przestrzenią liniową.

8. Wskazać bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $T : R^3 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z) = (0, 2x + 2y, -x - y)$.

9. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y'' - 2y' + y = xe^x$.

10. Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć funkcje $x(t)$ i $y(t)$ takie, że $x'(t) = -y$, $y'(t) = -x$ i $x(0) = 2$ oraz $y(0) = 0$.

11. Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

- [ ] Zbiór składający się z wektora zerowego jest podprzestrzenią każdej przestrzeni wektorowej.
- [ ] Każda przestrzeń wektorowa ma co najmniej dwie różne podprzestrzenie.
- [ ] Każda przestrzeń wektorowa, w której jest niezerowy wektor, ma co najmniej dwie różne podprzestrzenie.
- [ ] Jeśli S i T są biorami wektorów z przestrzeni wektorowej V, to zawsze $\mathcal{L}(S \cap T) \subseteq \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(T)$.
- [ ] Jeśli $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jest podzbiorem przestrzeni wektorowej, to $\mathbf{v}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- [ ] Jeśli $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jest podzbiorem przestrzeni wektorowej, to $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dla każdych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
- [ ] Przestrzeń R^2 jest podprzestrzenią przestrzeni R^3.
- [ ] Jeśli wiersze macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ są liniowo zależne, to $\det \mathbf{A} = 0$.

Odpowiedzi: (1) $\sqrt{3}/2$; (2) $x = -2-3j$ i $x = 1-j$; (3) $y = 3$; (4) $\mathbf{X} = 1/6 \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; (5) Wystarczy pokazać, że $\mathbf{AX} = 3\mathbf{X}$; (6) $x = 7$; (7) Wystarczy przykładowo zauważyć, że $\varphi(x) = x - 1$ i $\psi(x) = (x-2)^2$ należą do S, ale ich suma nie należy do S; (8) Bazą jądra i bazą obrazu są przykładowo $b = ((-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ i $C = ((0, 2, -1))$; (9) $y = (c_1 + c_2 x + x^3/6)e^x$; (10) $x = -2\mathrm{sh}t = -e^t + e^{-t}$ i $y = 2\mathrm{ch}t = e^t + e^{-t}$.