Nazwisko i imię	Nr grupy	2003/04 A

1. Obliczyć $\operatorname{Re}\left(\dfrac{(1+j)^{200}j^{102}}{(1+j\sqrt{3})^{100}}\right)$.

2. Rozwiązać równanie $x^2+(1-j)x+4+7j=0$.

3. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą x z układu równań $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=1 \\ x+2y+3z=2 \\ y+2z+3t=-2 \end{cases}$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Pokazać, że $\lambda=6$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Wyznaczyć bazę $B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)$ przestrzeni $V\subset R^4$, gdy $[(1,-4,5,-4)]_B=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $[(1,6,0,1)]_B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

7. Dla jakich $p \in R$ zachodzi równość $\dim\left(\mathcal{L}\left((1,3,p,1),(p,-1,1,1),(4,5,5,3)\right)\right) = p$?

8. Wskazać bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia liniowego $T : R^3 \to R^2$, gdzie $T(x,y,z) = (x+y, x+y-z)$.

9. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y'' + y' = 2 + 3e^{-x}$.

10. Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć funkcje $x(t)$ i $y(t)$ takie, że $x'(t) = y + t$, $y'(t) = x - 1$ i $x(0) = 2$ oraz $y(0) = 1$.

11. Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

- [ ] Jeśli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ są wektorami z przestrzeni Euklidesa i $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z})$, to $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.
- [ ] Jeśli $\mathbf{x}$ jest wektorem z przestrzeni Euklidesa i $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$ dla każdego wektora $\mathbf{y}$, to $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- [ ] W przestrzeni R^n istnieje tylko jeden iloczyn skalarny.
- [ ] W przestrzeni R^2 istnieje iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$ względem którego wektory $\mathbf{x} = (1,1)$ i $\mathbf{y} = (1,2)$ są ortogonalne.
- [ ] Metoda Grama-Schmidta umożliwia konstrukcję ortogonalnego zbioru wektorów z dowolnego zbioru wektorów.
- [ ] Każda przestrzeń Euklidesa posiada ortonormalną bazę.
- [ ] Każdy zbiór ortogonalny jest liniowo niezależny.
- [ ] Każdy zbiór ortonormalny jest liniowo niezależny.

Odpowiedzi: (1) 1/2; (2) $x = -2 + 3j$, $x = 1 - 2j$; (3) -1; (4) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (5) Pokazać, że $\det(\mathbf{A} - 6\mathbf{I}) = 0$; (6) $\mathbf{b}_1 = (1/3, -2/3, 4/3, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, -1, 1)$; (7) $p = 2$ i $p = 3$; (8) $\operatorname{Ker} T = \mathcal{L}(1, -1, 0)$ i $\operatorname{Im} T = \mathcal{L}((1, 1), (0, 1))$; (9) $y = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x - 3xe^{-x}$; (10) $x = 3/2e^t + 1/2e^{-t} = 2\mathrm{ch}t + \mathrm{sh}t$, $y = 3/2e^t - 1/2e^{-t} = 2\mathrm{sh}t + \mathrm{ch}t - t$.