CAŁKI KRZYWOLINIOWE I POWIERZCHNIOWE

1. Obliczyć następujące całki krzywoliniowe nieskierowane:

   (a) $\int_K xy\,dl$, gdzie $K = \{(\cosh t, \sinh t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$;

   (b) $\int_K \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, gdzie krzywa K określona jest równaniem $x^2+y^2 = ax$;

   (c) $\int_K \sqrt{x^{4/3}+y^{4/3}}\,dl$, a krzywa K określona jest równaniem $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$;[1]

   (d) $\int_K x^2\,dl$, gdzie krzywa K określona jest równaniami $x^2+y^2+z^2 = a^2$ i $x+y+z=0$;[2]

   (e) $\int_K (x^2+y^2+z^2)\,dl$, gdzie $K = \{(a\cos t, a\sin t, bt) : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$.

2. Obliczyć $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\,dl$ od punktu $E(-1,0)$ do punktu $H(0,1)$: a) po prostej EH, b) po łuku astroidy $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

3. Obliczyć masę krzywej $C = \{(x,y) : y^2 = 2px,\ 0 \leqslant x \leqslant p/2\}$, gdy jej gęstością jest $\rho(x,y) = |y|$.[3]

4. Obliczyć pole powierzchni bocznej walca $x^2+y^2 = 16$ zawartej między płaszczyzną $z = 0$ i walcem parabolicznym $z = 4 + \dfrac{x^2}{4}$.

5. Znaleźć pole powierzchni walcowej $x^2+y^2 = a^2$ zawartej między płaszczyzną $z = 0$ i powierzchnią $z = (x^2+y^2)^3$.[4]

6. Znaleźć pole powierzchni walcowej $\{(e^t\cos t, e^t\sin t, z) : 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},\ z \in R\}$, zawartej między płaszczyzną $z = 0$ i powierzchnią $z = x^2+y^2+1$.[5]

7. Obliczyć następujące całki krzywoliniowe skierowane:

   (a) $\int_C (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, gdzie krzywa $C = \{(x,y) : y = x^2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ jest skierowana zgodnie ze wzrostem parametru x;

   (b) $\int_C (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, a krzywa $C = \{(x,y) : y = 1-|1-x|,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ jest skierowana zgodnie ze wzrostem parametru x;

   (c) $\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, gdzie krzywa $C = \{(x,y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$ jest zorientowana dodatnio (względem wnętrza);

[1] $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

[2] $\int_K x^2\,dl = \int_K y^2\,dl = \int_K z^2\,dl$, więc $\int_K x^2\,dl = 1/3\int_K (x^2+y^2+z^2)\,dl = 1/3\int_K a^2\,dl = a^2/3\int_K dl = a^2/3 \cdot 2\pi a$.

[3] $m = \int_C \rho(x,y)\,dl$

[4] $2\pi a^7$

[5] $\frac{\sqrt{2}}{3}(e^{\frac{3\pi}{4}} + 3e^{\frac{\pi}{4}} - 4)$

(d) $\oint_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, gdzie krzywa $C=\{(x,y):x^2+y^2=a^2\}$ jest zorientowana dodatnio (względem wnętrza);

(e) $\oint_C e^x(1-\cos y)\,dy+e^x(y-\sin y)\,dx$, gdzie krzywa C jest zorientowana dodatnio (względem wnętrza) i jest brzegiem obszaru $\{(x,y):0\leqslant x\leqslant \pi,\ \ 0\leqslant y\leqslant \sin x\}$;

(f) $\oint_C e^{-x^2+y^2}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$, gdzie krzywa $C=\{(x,y):x^2+y^2=R^2\}$ jest zorientowana dodatnio (względem wnętrza);

(g) $\oint_\Gamma xy^2\,dy-x^2y\,dx$, gdzie Γ jest okręgiem $x^2+y^2=a^2$;[6]

(h) $\oint_C \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$, gdzie krzywa C jest elipsą $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ zorientowaną dodatnio względem wnętrza;

(i) $\oint_C \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$, gdzie krzywa C jest zamknięta, kawałkami gładka, zorientowana dodatnio i punkt $(0,0)$ leży: (1) na zewnątrz obszaru ograniczonego przez C, (2) wewnątrz obszaru ograniczonego przez C;

(j) $\oint_C y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, gdzie krzywa $C=\{(x,y,z):x^2+y^2=2x,\ \ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\geqslant 0\}$ skierowana jest tak, że jej rzut na płaszczyznę $z=0$ skierowany jest ujemnie względem wnętrza;

(k) $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, gdzie krzywa $C=\{(x,y,z):x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=bt,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$ zorientowana jest zgodnie ze wzrostem parametru t.

8. Obliczyć $\int_{AB} xy^2dx+yz^2dy-zx^2dz$, gdzie AB jest łukiem okręgu określonego równaniami $x^2+y^2+z^2=45$, $2x+y=0$ od $A(3,-6,0)$ do $B(-2,4,5)$.

9. Obliczyć pole figury ograniczonej linią $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.[7]

10. Pokazać, że następujące wyrażenia są różniczkami zupełnymi i wyznaczyć ich funkcje pierwotne:

(a) $(2x-3y^2+1)\,dx+(2-6xy)\,dy$;

(b) $(1-\sin 2x)\,dy-(3+2y\cos 2x)\,dx$.

11. Obliczyć następujące całki krzywoliniowe niezależne od drogi całkowania:

(a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx+x\,dy$;

---

[6] $I=\pi a^4/2$

[7] $P=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$

(b) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ wzdłuż krzywej, która nie przechodzi przez punkt $(0,0)$;

(c) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ wzdłuż krzywej, która nie przecina prostej $y = x$;

(d) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$;

(e) $\displaystyle\int_{(0,2)}^{(1,2)} yxe^x\,dx + (x-1)e^x\,dy$;

(f) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$;

(g) $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(2,3,4)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$;

(h) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(0,2,3)} (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})\,dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz.$

12. Obliczyć następujące całki powierzchniowe niezorientowane:

(a) $\displaystyle\iint_S (x+y+z)\,ds$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $x+y+z=1$ zawartą w pierwszym oktancie;

(b) $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)\,ds$, gdzie S jest częścią stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ zawartą wewnątrz walca $x^2+y^2 = 2ax$ $(a > 0)$.

(c) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,ds$, gdzie S jest częścią paraboloidy $x^2+y^2 = z$ odciętą płaszczyzną $z = 1$;

(d) $\displaystyle\iint_S xy\,ds$, gdzie S jest całkowitą powierzchnią stożka wyznaczonego przez równania $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1$;

(e) $\displaystyle\iint_S |xyz|\,ds$, gdzie S jest powierzchnią $z = 1 - x^2 - y^2$ dla $z \geqslant 0$.

13. Obliczyć następujące całki powierzchniowe zorientowane:

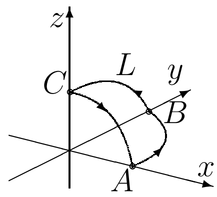
(a) $\displaystyle\iint_S (x-2z)dydz + (3z-4x)dzdx + (5x+y)dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną ostrosłupa o wierzchołkach w punktach $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ i $(0,0,0)$;

(b) $\displaystyle\iint_S -x^2zdydz + ydzdx + 2dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną elipsoidy $4x^2+y^2+4z^2 = 4$ znajdującą się w pierwszej ósemce układu;

(c) $\displaystyle\iint_S zdxdy + ydxdz + xdydz$, gdzie S jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią sześcianu określonego przez płaszczyzny $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.[8]

[8] Zastosować tw. Gaussa-Ostrogradskiego.

14. Korzystając z twierdzenia Stockesa obliczyć $\oint_L 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx + xy^3dy + \sin z\,dz$, gdzie L jest zamkniętą krzywą ABC z rys. Za S przyjąć powierzchnię elipsoidy $4x^2+y^2+4z^2=4$.



15. Oblicz strumień pola wektorowego:

(a) $F=[x,y,z]$ przez powierzchnię $x^2+y^2+z^2=4$ zorientowaną ku wnętrzu;

(b) $F=[xz,-yz,y]$ przez powierzchnię $x^2+y^2+4z^2=4$ zorientowaną na zewnątrz;

(c) $F=[4x^3,4y^3,-6z^4]$ przez powierzchnię bryły ograniczonej walcem $x^2+y^2=a^2$ i płaszczyznami $z=0$ i $z=4$ zorientowaną ku wnętrzu;

(d) $F=[2x,y,z]$ przez powierzchnię bryły wyznaczonej przez paraboloidę $2z=x^2+y^2$ i płaszczyznę $y+z=4$ zorientowaną na zewnątrz.

calkikrz.tex