

Obliczalność i Złożoność

semestr zimowy 2023/24

Zestaw zadań 4

1. Proszę sprawdzić poprawność następujących twierdzeń i uzasadnić odpowiedź.
 - (i) Jeżeli $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ i A jest przeliczalny, to B jest przeliczalny.
 - (ii) Jeżeli $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ i A jest rozstrzygalny, to B jest przeliczalny.
 - (iii) Jeżeli $A \subseteq \Sigma^*$ jest nieskończony i przeliczalny, to istnieje $B \subseteq A$, taka że B jest nieskończony i rozstrzygalny.
 - (iv) Jeżeli $A \subseteq \Sigma^*$ nie jest przeliczalny, to \overline{A} nie może być skończony.
2.
 - (i) Niech będą $A, B \subseteq \Sigma^*$ przeliczalne oraz $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ obliczalna. Proszę pokazać, że $A \cap B, A \cup B, f(A)$ oraz $f^{-1}(A)$ są przeliczalne.
 - (ii) Niech będą $A, B \subseteq \Sigma^*$, takie że B jest przeliczalny oraz $A \leq B$. Proszę pokazać, że A jest przeliczalny.
3.
 - (i) Niech będzie $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ oraz B rozstrzygalny. Czy A jest rozstrzygalny wtw. $A \cap \overline{B}$ jest rozstrzygalny?
 - (ii) Niech będzie $B \subseteq A \subseteq \Sigma^*$ oraz B przeliczalny. Czy A jest przeliczalny wtw. $A \cap \overline{B}$ jest przeliczalny?
4. Proszę sprawdzić, czy następujące zbiory są zbiorami indeksów i uzasadnić odpowiedź.
 - (i) $A = \{ x \mid \Phi_x \text{ bijekcja} \}$
 - (ii) $A = \{ x \mid \Phi_x(x) = 13 \}$
 - (iii) $A = \{ x \mid \text{istnieje } y \in \Sigma^*, \text{ takie że } \Phi_x(y) = y^2 \}$
5.
 - (i) Proszę pokazać, że $A = \{ x \mid \text{Def}(\Phi_x) \neq \emptyset \}$ nie jest rozstrzygalny.
 - (ii) Niech będzie $A = \{ x \mid \Phi_x \text{ totalna i ograniczona} \}$. Proszę pokazać, że A nie jest rozstrzygalny oraz że \overline{A} nie jest przeliczalny.