

Obliczalność i Złożoność

semestr zimowy 2023/24

Zestaw zadań 3

1. Niech będą $W = \Sigma^*$ oraz M zbiorem funkcji $W^n \rightsquigarrow W^m$.
Funkcja $\varphi : W \times W^n \rightsquigarrow W^m$ jest funkcją uniwersalną dla M , jeżeli

- (i) $\varphi_x \in M$ dla wszystkich $x \in W$
- (ii) dla każdej funkcji $f \in M$ istnieje $x \in W$, taka że $\varphi_x = f$.

Proszę pokazać, że nie istnieje funkcja uniwersalna dla

$$M := \{ f : W \rightarrow W \mid f \text{ rośnie ściśle monotonicznie} \}.$$

2. Niech będą $W = \Sigma^*$ oraz $\Phi_x(y)$ uniwersalną funkcję.

- (i) Proszę pokazać, że istnieje obliczalna funkcja $f : W \rightarrow W$, taka że $\Phi_{f(x)}(y) = 2 \cdot \Phi_x(y)$ dla wszystkich $x, y \in W$.
- (ii) Proszę pokazać, że istnieje $x \in W$, taka że $\Phi_x(y) = (y \cdot x) + y$ dla wszystkich $y \in W$.

3. Niech $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- (i) Proszę pokazać, że jeżeli A oraz B są rozstrzygalne, to $A \cap B$ oraz $A \cup B$ są rozstrzygalne.
- (ii) Czy jeżeli A oraz $A \cup B$ są rozstrzygalne, to B jest rozstrzygalny?
- (iii) Niech $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ będzie obliczalna. Proszę pokazać, że jeżeli A jest rozstrzygalny, to $f^{-1}(A)$ jest rozstrzygalny.

4. (i) Proszę pokazać, że $A = \{ x \mid x_0 \in \text{Dom}(\Phi_x) \}$ nie jest rozstrzygalny.
(ii) Proszę pokazać, że $A = \{ x \mid \text{Rng}(\Phi_x) = \emptyset \}$ nie jest rozstrzygalny.

5. (i) Proszę znaleźć zbiór A , który redukuje się do \bar{A} .
(ii) Proszę pokazać, że $A = \{ x \mid \Phi_x \text{ total} \}$ nie redukuje się do \bar{A} .