§7 Niedeterminizm i automaty

Maszyny Turinga jako akceptor (automat)

Def:

Maszyna M, to 5-elementowa krotka

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

gdzie

Q : skończony zbiór

$q_0 \in Q$

Σ alfabet, $b, l, r \notin \Sigma$

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{b\}) \rightsquigarrow Q \times (\Sigma \cup \{b\}) \times \{l, r\}$

$F \subseteq Q$ (stany akceptujące)

$$L(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F, \alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^* : q_0 w \vdash^* \alpha_1 p \alpha_2 \}$$

Maszyna pracuje deterministycznie, to znaczy dla konfiguracji k istnieje dokładnie (co najwyżej) jedna bezpośrednia kolejna konfiguracja k'.

Def:

Maszyna Turinga M niedeterministyczna

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

w tym

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times (\Sigma \cup \{b\} \times \{l, r\}))$$

czyli M w każdym kroku może wybierać między różnymi bezpośrednymi kolejnymi konfiguracjami.

M akceptuje $w \in \Sigma^*$, jeżeli istnieje $q_0 w \vdash^* \alpha_1 q \alpha_2$ dla $q \in F$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^*$.

Przykład:

Niedet. maszyna Turinga M, która akceptuje
$L = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*, v \text{ podsłowem } u\}$

M sprawdza, czy w jest w formie ucv. Jeżeli tak M wybiera pewnej ilości liter s słowa u (i pisze s na dodatkową taśmę). Jeżeli s = v, to M akceptuje w.

Twierdzenie

Języki zaakceptowane przez niedet. maszyna Turinga są dokładnie te języki zaakceptowane przez det. maszyny Turinga.

"Dowód"

Det. maszyna buduje drzewo zawierające wszystkie możliwe obliczenia niedet. maszyny.

Tak jak gramatyki akceptory można ograniczyć, na przykład:

- operacja, to zawsze "→"
- nie wolno pisać na taśmę

⟶ skończone automaty

Def:

Skończony automat, to

$$A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$$

w tym

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q \quad \text{(wersja det.)}$$

lub

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q) \quad \text{(wersja niedet.)}$$

Uwaga

Jeżeli A skończony automat i $q_0 w \vdash_A^* u q_i v$, to $uv = w$, tzn. u "już nie potrzebne", czyli konfiguracje $k \in Q \times \Sigma^*$

Def:

(i) k, k' konfiguracje

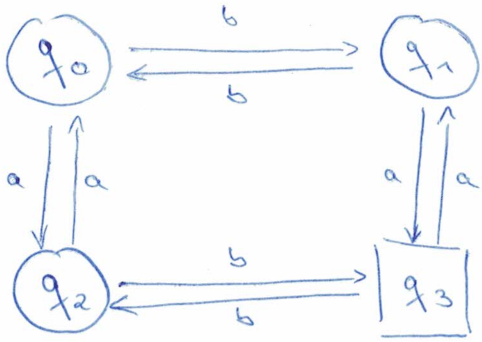
$$q_i a u \vdash q_j u, \text{ jeżeli } \delta(q_i, a) \underset{(\ni)}{=} q_j$$

(ii) A skończony automat

$$L(A) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q_j \in F : q_0 w \vdash^* q_j \}$$

Przykłady:

(i)

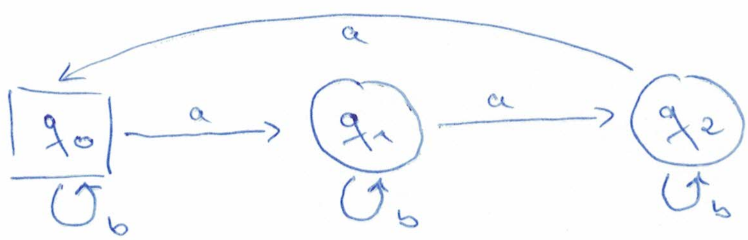


$q_0 aba \vdash q_2 ba \vdash q_3 a \vdash q_1 \notin F$

$q_0 abaa \vdash q_2 baa \vdash q_3 aa \vdash q_1 a \vdash q_3 \in F$

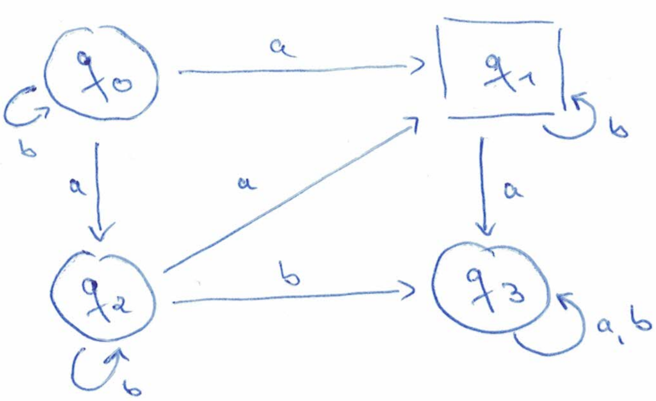
$L(A) = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a$ i $|w|_b$ nieparzysta $\}$

(ii)



$L(A) = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w|_a = 3 \cdot n \}$

(iii)



$q_0 baa \vdash q_0 aa \vdash q_1 a \vdash q_3 \notin F$, ale

$q_0 baa \vdash q_0 aa \vdash q_2 a \vdash q_1 \in F$, czyli

$baa \in L(A)$

$L(A) = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 1$ lub $|w|_a = 2 \}$

Twierdzenie

A det. skończony automat. $L(A) \in RL$.

Dowód:

$A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$

Gramatyka G symuluje obliczenia A:

$$G := (Q, \Sigma, q_0, P)$$

$$P := \{ q \to aq' \mid \delta(q,a) = q' \} \cup$$
$$\{ q \to a \mid \delta(q,a) \in F \} \cup$$
$$\{ q_0 \to \lambda \mid q_0 \in F \}$$

wtedy $S \overset{*}{\Rightarrow}_G wA$ wtw. $q_0 w \vdash_A^* A$

Twierdzenie

$L \subseteq \Sigma^*$ jest zaakceptowany przez niedet. skończony automat wtw. L jest zaakceptowany przez det. skończony automat.

"Dowód"

A niedet. skończony automat, taki że $L(A) = L$.

$\overline{A} := (\Sigma, \overline{Q}, \overline{q}_0, \overline{\delta}, \overline{F})$

$$\overline{Q} := \mathcal{P}(Q), \quad \overline{q}_0 := \{q_0\}$$

$$\overline{F} := \{ S \in \overline{Q} \mid S \cap F \neq \emptyset \}$$

$$\overline{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q,a)$$

Przykład

Automat z przykładu (iii)

$$\bar{\delta}(\{q_0\}, a) = \bigcup_{q \in \{q_0\}} \delta(q, a) = \{q_1, q_2\}$$

$$\bar{\delta}(\{q_1, q_2\}, a) = \bigcup_{q \in \{q_1, q_2\}} \delta(q, a) = \{q_1, q_3\}$$

czyli

$$\bar{q_0}\, aa = \{q_0\} aa \vdash \{q_1, q_2\} a \vdash \{q_1, q_3\} a$$

tzn. niedet. automat po czytaniu słowa aa jest w stanie q_1 lub q_3. Ponieważ $q_1 \in F$ niedet. automat akceptuje aa.

Det. automat także akceptuje aa, ponieważ $q_1 \in \{q_1, q_3\}$

Twierdzenie $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in RL$. To L jest zaakceptowany przez niedet. skończony automat.

„Dowód"

$G = (N, \Sigma, P, S) \in RL$.

$A := (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$

$Q := N \cup \{Z\}$, $Z \notin N$, $\quad q_0 := S$

$F := \{Z\} \cup \{A \mid A \to \lambda \in P\}$

$\delta(A, a) := \{B \mid A \to aB \in P\} \cup \{Z \mid A \to a \in P\}$

$\delta(Z, a) = \emptyset$

czyli skończone automaty akceptuje dokładnie języki regularne;
nieważne czy są deterministyczne czy niedeterministyczne!

<u>Uwaga</u>

Deterministyczne i niedeterministyczne automaty nie zawsze są równoważne:
Niedeterministyczne automaty z stosem akceptują dokładnie języki bezkontekstowe,
ale $L = \{ w \varrho(w) \mid w \in \Sigma^* \} \in CF$ nie jest akceptowane przez deterministyczny automat z stosem.