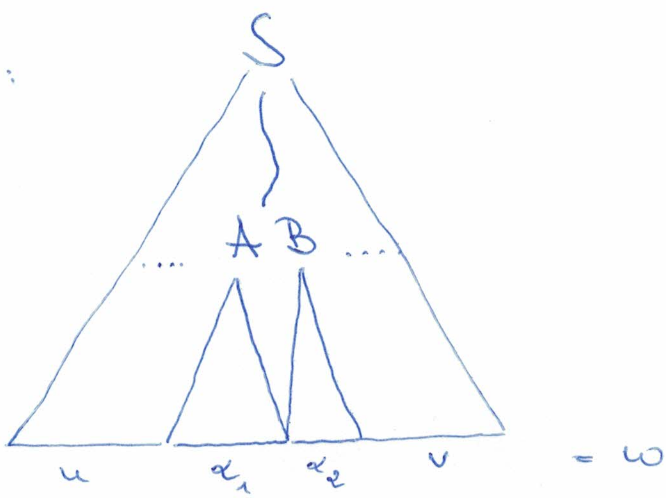
§6 Języki bezkontekstowe

Niech $G = (N, \Sigma, P, S)$ bezkontekstowa.
jeżeli $AB \overset{n}{\Rightarrow}_G w$, to istnieją $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup \Sigma)^*$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
takie że

$$A \overset{n_1}{\Rightarrow}_G \alpha_1, \quad B \overset{n_2}{\Rightarrow}_G \alpha_2, \quad w = \alpha_1 \alpha_2, \quad n = n_1 + n_2$$

czyli
$S \overset{*}{\Rightarrow}_G w$:



Def:
Bezkontekstowa gramatyka $G = (N, \Sigma, P, S)$ jest w postaci normalnej Chomsky'ego, jeżeli wszystkie reguły w P mają formę

$$A \to BC \quad \text{lub} \quad A \to a \quad \text{lub} \quad S \to \lambda$$

$$A, B, C \in N, \; B \neq S \neq C, \; a \in \Sigma$$

Twierdzenie
Dla każdej gramatyki bezkontekstowej G istnieje gramatyka bezkontekstowa w postaci normalnej Chomsky'ego $\overline{G}$, taka że $L(G) = L(\overline{G})$.

Przykład:

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$S \to ASA \mid aB$

$A \to B \mid S$

$B \to b \mid \lambda$

(i) nowy symbol startowy

$\bar{S} \to S$

$S \to ASA \mid aB$

$A \to B \mid S$

$B \to b \mid \lambda$

(ii) usunięcie λ-produkcji

$\bar{S} \to S$

$S \to ASA \mid aB \mid a$

$A \to B \mid \lambda \mid S$

$B \to b$

$\bar{S} \to S$

$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$A \to B \mid S$

$B \to b$

(ii) usunięcie $N_1 \to N_2$

"$A \to B$"

$\bar{S} \to S$

$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$A \to b \mid S$

$B \to b$

"$A \to S$"

$\bar{S} \to S$

$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$A \to b \mid ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$B \to b$

"$\bar{S} \to S$"

$\bar{S} \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$S \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$A \to ASA \mid AS \mid SA \mid aB \mid a \mid b$

$B \to b$

(iv) usunięcie więcej niż dwóch nonterminalnych

"$S \to AA_1$, $A_1 \to SA$"

$\bar{S} \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$S \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid aB \mid a$

$A \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid aB \mid a \mid b$

$A_1 \to SA$

$B \to b$

(v) usunięcie $N_1 \to aN_2$:

$\bar{S} \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid N_aB \mid a$

$S \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid N_aB \mid a$

$A \to AA_1 \mid AS \mid SA \mid N_aB \mid a \mid b$

$N_a \to a$

$A_1 \to SA$

$B \to b$

Twierdzenie

Niech $L \in CF$. Wtedy istnieje stała k_L, taka że dla każdego słowa $w \in L$, takie że $|w| \geq k_L$ istnieją $u, x, y, z, w \in \Sigma^*$, $xz \neq \lambda$, takie że

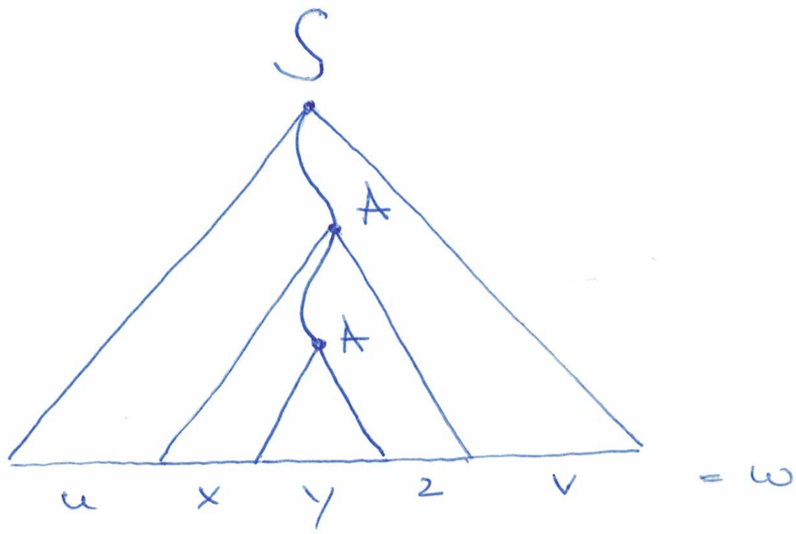
(i) $w = uxyzv$

(ii) $|xyz| \leq k_L$

(iii) $ux^m yz^m v \in L$ dla wszystkich $m \geq 0$.

Dowód:

jeżeli $A \in N$ powtarza się w wywodzie $S \overset{*}{\Rightarrow} w$



to $ux^m yz^m v \in L$ dla wszystkich $m \geq 0$.

Jeżeli G jest w postaci Chomsky'ego a w wywodzie $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ nie ma ścieżki dłuższej niż i, to $|w| \leq 2^{i-1}$.

Niech $k_L := 2^{|N|}$.

Dla $w \in L$, takie że $|w| \geq k_L$, czyli $|w| > 2^{|N|-1}$, więc istnieje ścieżka dłuższa niż $|N|$, tzn. jakaś $A \in N$ wystąpi conajmniej dwa razy.

Uwaga:

$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\} \notin CF$

ale L spełnia twierdzenie.

Twierdzenie

$CF \neq CS$

Dowód:

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in CS$

Zał: $L \in CF$

Niech p będzie stałą z twierdzenia, czyli

$a^p b^p c^p = uxyzv$, $xz \neq 1$, $|xyz| \leq p$.

Wtedy $xyz \in \{a^k, b^k, c^k, a^k b^l, b^k c^l\}$.

jeżeli $xyz = a^k$, to $uyv = a^{p-\bar{k}} b^p c^p \in L$ ↯

jeżeli $xyz = a^k b^l$, to $uyv = a^{p-\bar{k}} b^{p-\bar{l}} c^p \in L$ ↯

Twierdzenie

Języki bezkontekstowe nie są zamknięte na operacje $\cap$ oraz $\overline{}$.

Dowód:

(i) $L_1 := \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$; $L_2 := \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$

wtedy $L_1, L_2 \in CF$,

ale $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin CF$

(ii) $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ i języki bezkontekstowe są zamknięty na $\cup$.

Twierdzenie

G gramatyka bezkontekstowa. Rozstrzygalne są

(i) $L(G) \neq \emptyset$

(ii) $L(G)$ skończony

(iii) $x \in L(G)$

Def Problem odpowiedniości Posta (PCP)

Niech $A = (u_1, \ldots u_m)$, $B = (v_1, \ldots v_m)$, $u_i, v_j \in \Sigma^*$

Czy istnieje ciąg indeksów, taki że

$$u_{i_1} \ldots u_{i_m} = v_{i_1} \ldots v_{i_m} \ ?$$

Dla $t \in \{1, \ldots m\}^*$ piszemy $A(t) = u_{i_1} \ldots u_{i_k}$ dla $t = i_1 \ldots i_k$.

Przykłady: $\Sigma = \{1, 2\}$

(i) $A = 1, \quad 1211, \quad 112$

$B = 111, \quad 12, \quad 2$

$A(13) = 1.112 = 111.2 = B(13)$

$A(21) = B(21)$

(ii) $A = 1, \ 22$

$B = 2, \ 11$ nie ma rozwiązania

(iii) $A = 12, \quad 211, \quad 121$

$B = 121, \quad 11, \quad 211$

zał: $A(t) = B(t)$, wtedy $t = 1t_1$

$A(1t_1) = 12\,A(t_1)$

$B(1t_1) = 121\,B(t_1)$

czyli $t_1 = 1t_2$ lub $t_1 = 3t_2$

ale $A(11t_2) = 1212\,A(t_2)$
$\neq 121121\,B(t_2) = B(11t_2)$,

czyli $t_1 = 3t_2$.

$A(13t_2) = 12121\,A(t_2)$

$B(13t_2) = 121211\,B(t_2)$

czyli 'znowu' $t_3 = 3t_4 \ldots$
i nie ma rozwiązania.

Twierdzenie

PCP nie jest rozstrzygalny.

Dowód:
Niech S będzie systemem Semi-Thue, taki że
$P(u,v)$ wtw. $u \overset{*}{\Rightarrow}_S v$ nie jest rozstrzygalny.
Pokazujemy $P \leq PCP$
tzn. dla każdego (u,v) konstruujemy $(A,B)_{u,v}$, taką
że $P(u,v)$ wtw. $PCP((A,B)_{u,v})$.

$S = (\Sigma, P)$, $P = \{x_i \to y_i \mid i = 1, \ldots n\}$, $\Sigma = \{a_1, \ldots a_r\}$

$T = \Sigma \cup \{\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_r\} \cup \{+, \bar{+}, [,]\}$

$A = [u+,], +, \bar{+}, a_1, \ldots a_r, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_r, y_1, \ldots y_n, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$

$B = [, \bar{+}v], \bar{+}, +, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_r, a_1, \ldots a_r, \bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n, x_1, \ldots x_n$

Wtedy jeżeli

$$u = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = v$$

to istnieje t, takie że

$$A(t) = [w_0 + \bar{w}_1 \bar{+} w_2 + \ldots + \bar{w}_{k-1} \bar{+} w_k] = B(t)$$

oraz jeżeli $PCP(A,B)$ ma rozwiązanie, to najkrótsze t, takie że $A(t) = B(t)$ "spełnia"

$$A(t) = [w_0 + \overline{w_1} \bar{+} w_2 + \ldots + \overline{w_{k-1}} \bar{+} w_k] = B(t),$$

czyli

$$u = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = v$$

<u>Przykład:</u>

$$S = (\{a,b\}, \{aa \to bb, ba \to ab\})$$

$$u = aba, \; v = bbb$$

wtedy

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	γ
$A =$	$[aba+$	$]$	$+$	$\bar{+}$	a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	bb	ab	$\bar{b}\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$
$B =$	$[$	$\bar{+}bbb]$	$\bar{+}$	$+$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	a	b	$\bar{a}\bar{a}$	$\bar{b}\bar{a}$	aa	ba

$$A(1) = [aba+$$
$$B(1) = [$$

$$A(17\gamma 4) = [aba+\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{+}$$
$$B(17\gamma 4) = [aba+$$

$$A(17\gamma 496) = [aba+\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{+}bbb$$
$$B(17\gamma 496) = [aba+\bar{a}\bar{a}\bar{b}$$

$$A(17\gamma 4962) = [aba+\bar{a}\bar{a}\bar{b}+bbb]$$
$$B(17\gamma 4962) = [aba+\bar{a}\bar{a}\bar{b}+bbb]$$

Twierdzenie

Niech $G_1, G_2 \in CF$.
Wtedy $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ nie jest rozstrzygalny.

Dowód:

Niech $P(G_1, G_2)$ wtw. $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$.

Pokazujemy $PCP \leq P$

$A = u_1, \dots u_m$, $B = v_1, \dots v_m$, $u_i, v_i \in T^*$

$\Delta := \{1, \dots m\}$, $\Delta \cap T = \emptyset$

$G_j := (\{S_j\}, T \cup \Delta, P_j, S_j)$ dla $j = 1,2$

$P_1 = \{ S_1 \to u_i S_1 i \mid u_i i \ , i = 1, \dots m\}$

$P_2 = \{ S_2 \to v_i S_2 i \mid v_i i \ , i = 1, \dots m\}$

Wtedy

$L(G_1) = \{ u_{i_1} \dots u_{i_m} i_m \dots i_1 \mid m \geq 1, 1 \leq i_j \leq m\}$

$L(G_2) = \{ v_{i_1} \dots v_{i_m} i_m \dots i_1 \mid m \geq 1, 1 \leq i_j \leq m\}$

czyli

$x \in L(G_1) \cap L(G_2)$ wtw. istnieje $t \in \Delta^*$, takie
że $x = A(t)\varrho(t) \wedge x = B(t)\varrho(t)$

więc

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$ wtw.
istnieje $t \in \Delta^*$, takie że $A(t) = B(t)$ wtw.
$PCP(A,B)$ ma rozwiązanie.

Twierdzenie

Niech $G, G_1, G_2 \in CF$. Nierozstrzygalny są

(i) $L(G) = \Sigma^*$

(ii) $L(G) \in RL$

(iii) $\overline{L(G)} \in CF$

(iv) $L(G_1) = L(G_2)$

(v) $L(G_1) \cap L(G_2) \in CF$

Twierdzenie

$R \in RL$, $L \in CF$. Wtedy $R \cap L \in CF$.

Przykład:

$L := \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

zał: $L \in CF$

$L_1 := \{w_1 w_2 w_3 w_4 \mid w_1, w_3 \in \{a\}^+, w_2, w_4 \in \{b\}^+\} \in RL$

czyli $L_2 = L_1 \cap L \in \cancel{RL}\ CF$.

ale $L_2 = \{a^i b^j a^i b^j \mid i,j \geq 1\} \notin CF$ ↯

więc $L \notin CF$.