§5 Języki regularne

Twierdzenie

Jeżeli $L_1, L_2 \in RL$, to $L_1 \cap L_2, \bar{L}_1, L_1 \setminus L_2 \in RL$.

Twierdzenie

Niech $L \in RL$. Wtedy istnieje stała k_L, taka że dla każdego słowa $w \in L$, takie że $|w| \geq k_L$, istnieją $x, y, z \in \Sigma^*$, $y \neq \lambda$, takie że

(i) $w = xyz$

(ii) $|xy| \leq k_L$

(iii) $xy^m z \in L$ dla wszystkich $m \geq 0$

Dowód:

Niech $G = (N, \Sigma, P, S)$, taka że $L = L(G)$.

Niech $k_L := |N| + 1$

Niech $w \in L$, takie że $|w| \geq k_L$. Wtedy $S \overset{n}{\Rightarrow} w$

a $n \geq |w| \geq |N| + 1$, czyli

$S \Rightarrow a_1 N_1 \Rightarrow a_1 a_2 N_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n N_{|N|} \Rightarrow w_{n+1} N_{|N|+1} \overset{*}{\Rightarrow} w$

wtedy istnieją $i, j \leq |N| + 1$, takie że $N_i = N_j$, czyli

$$S \overset{*}{\Rightarrow} x N_i \overset{+}{\Rightarrow} xy N_i \overset{*}{\Rightarrow} xyz = w$$

więc $y \neq \lambda$, $|xy| \leq |N| + 1 = k_L$ i dla wszystkich m

$xy^m z \in L$ ponieważ

$$S \overset{*}{\Rightarrow} x N_i \overset{*}{\Rightarrow} xz$$

$$\text{oraz} \quad x N_i \overset{+}{\Rightarrow} xy N_i \overset{+}{\Rightarrow} xyy N_i \overset{+}{\Rightarrow} \dots$$

Twierdzenie

$RL \neq CF$

Dowód:

$L := \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in CF$.

Założenie: $L \in RL$.

Niech p będzie stałą z twierdzenia.

Dla $w := a^p b^p \in L$ mamy $|w| \geq p$, więc $w = xyz$,

$|xy| \leq p$, $y \neq \lambda$,

czyli $xy = a^l$, $y = a^k$, $k \neq 0$.

więc $xy^0z \in L$.

ale $xz = a^{p-k} b^p \notin L$ ↯

Twierdzenie

G prawostronnie liniowa gramatyka.

(i) $L(G)$ nieskończony wtw. istnieje $w \in L(G)$, taka że $|N|+1 \leq |w| < 2(|N|+1)$

(ii) $L(G) \neq \emptyset$ wtw. istnieje $w \in L(G)$, taka że $|w| < |N|+1$.

Dowód:

(i) "$\Rightarrow$"

Niech w będzie najkrótszym słowem, takim że $w \in L(G)$ i $|w| \geq |N|+1$. (w istnieje, ponieważ $L(G)$ nieskończony).

Jeżeli $|w| \geq 2(|N|+1)$, to $w = xyz$, $|xy| \leq |N|+1$, $y \neq \lambda$ i $xz \in L(G)$.

wtedy $|w| > |xz| \geq |N|+1$. ↯

"$\Leftarrow$"

$w \in L(G)$ i $|N|+1 \leq |w|$, czyli

$w = xyz$, $|xy| \leq |N|+1$, $y \neq \lambda$ i $xy^m z \in L(G)$ dla $m \geq 0$,

więc $L(G)$ nieskończony.

Twierdzenie

G prawostronnie liniowa gramatyka, $w \in \Sigma^*$.

Rozstrzygalne są

(i) $w \in L(G)$

(ii) $L(G) = \emptyset$

(iii) $L(G)$ skończony

(iv) $L(G_1) = L(G_2)$