# §3 Rozstrzygalność i Przeliczalność

## 3.1 Funkcja uniwersalna

**Def:** $W = \Sigma^*$

$\phi^{n,m} : W^{n+1} \rightsquigarrow W^m$ jest funkcją uniwersalną, jeżeli

(i) $\phi^{n,m}$ jest obliczalna

(ii) dla każdej obliczalnej funkcji $f : W^n \rightsquigarrow W^m$ istnieje $p \in W$ takie, że

$$\phi(p, x_1, \dots x_n) = f(x_1, \dots x_n)$$

$p$ nazywamy indeks dla $f$ i piszemy $\phi_p = f$

**Def:**

(i) Problem Stop

$H(x,y) \iff \phi_x(y)\downarrow \qquad (H = \{(x,y) \mid \phi_x(y)\downarrow\})$

(ii) Problem Przykątny

$S(x) \iff \phi_x(x)\downarrow \qquad (S = \{x \mid \phi_x(x)\})$

Problem Stop i problem Przykątny są problemami nierozstrzygalnymi, tzn. nie ma algorytmu (indeksu) który je rozwiązuje.

Def:

(i) Predykat P jest rozstrzygalny, jeżeli funkcja

$$\chi_P(x) := \begin{cases} 1; & P(x) \\ 0; & \neg P(x) \end{cases}$$

jest obliczalna.

(ii) Zbiór A jest rozstrzygalny, jeżeli predykat $P_A(x) :\Leftrightarrow x \in A$ jest rozstrzygalny.

Twierdzenie

H oraz S są nierozstrzygalne.

Dowód:

zał: $\chi_S$ obliczalna. Niech

$$g(x) := \begin{cases} \phi_x(x) + 1; & \chi_S(x) = 1 \\ 0; & \chi_S(x) = 0 \end{cases}$$

wtedy g obliczalna, czyli ma indeks p.

Mamy $g(x)\downarrow$ dla wszystkich x, bo $\chi_S(x) = 1$ implikuje $\phi_x(x)\downarrow$.

Stąd $g(p)\downarrow$, więc też $\phi_p(p)\downarrow$, czyli $\chi_S(p) = 1$

więc $\phi_p(p) = g(p) = \phi_p(p) + 1$. ↯

H nierozstrzygalny, bo $H(x,x) \Leftrightarrow S(x)$.

(Więc gdyby H rozstrzygalny, to też S rozstrzygalny. "Redukcja")

# 3.2 Twierdzenie o indeksach

Jeżeli $f(x,y)$ obliczalna, to $f(x,y) = \phi_p(x,y)$ dla pewnego indeksu $p$.
Dla stałego $x_0$ funkcja $g(y) := f(x_0,y) = \phi_p(x_0,y)$ też jest obliczalna, więc istnieje $q$ taki, że $g = \phi_q$. Więc $\phi_q(y) = \phi_p(x_0,y)$.

Z $p$ i $x_0$ taki $q$ można obliczyć:

z maszyny Turinga $M_f$ dla $f$ i $x_0$ budujemy maszynę Turinga $M_g$ dla $g$ następująco: $M_g$ startując w konfiguracji $q_0 b y b$ pisze $x_0$ na taśmę, czyli generuje konfigurację $q_0 b x_0 b y b$ i wykonuje maszynę $M_f$.
Transformację $(M_f, x_0) \longrightarrow M_g$ taką można realizować przez maszynę Turinga $L$.

## Twierdzenie

Dla $n \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja obliczalna $L_n$, taka że dla wszystkich $m, s \in \mathbb{N}$

$$\phi_p^{n+m,s}(x,y) = \phi^{m,s}_{L_n(p,x)}(y)$$

dla wszystkich $x \in W^n$, $y \in W^m$, $p \in W$.

Uwaga: $L_n$ totalna.

Przykład:

(i) Dla obliczalnej $f(x,y)$ istnieje obliczalna $g$ taka, że $f(x,y) = \phi_{g(x)}(y)$

Niech $p$ będzie indeksem dla $f$. Dla $g(x) := L(p,x)$ mamy

$$f(x,y) = \phi_p(x,y) = \phi_{L(p,x)}(y) = \phi_{g(x)}(y)$$

(ii) Istnieje obliczalna $g$ taka, że $\phi_{g(x,y)} = \phi_x \circ \phi_y$

Niech $f(x,y,z) := (\phi_x \circ \phi_y)(z)$ $(= \phi(x, \phi(y,z)))$ wtedy $f$ obliczalna i z (i) istnieje obliczalna $g$ taka, że $\phi_{g(x,y)}(z) = f(x,y,z)$,

Twierdzenie

Dla obliczalnej $f: W \to W$ istnieje $p$ taka, że $\phi_p = \phi_{f(p)}$.

Dowód:

Niech $h(x,y) := \phi_{f(L(x,x))}(y)$. Istnieje $q$ taka, że $\phi_q = h$.

więc $\phi_{f(L(x,x))}(y) = h(x,y) = \phi_q(x,y) = \phi_{L(q,x)}(y)$

Dla $p := L(q,q)$ mamy więc

$$\phi_{f(p)}(y) = \phi_{f(L(q,q))}(y) = \phi_{L(q,q)}(y) = \phi_p(y).$$

Przykład:

Istnieje $p$, taki że $\phi_p(x) = p$ dla wszystkich $x \in W$

Niech $F(x,y) := x$. Istnieje indeks $q$ dla $f$,

czyli $F(x,y) = \phi_p(x,y) = \phi_{L(q,x)}(y)$.

Niech $g(x) := L(q,x)$.

Istnieje punkt stały dla $g$, czyli $p$, taki że

$\phi_p = \phi_{g(p)}$.

Więc $\phi_p(y) = \phi_{g(p)}(y) = \phi_{L(q,p)}(y) = F(p,y) = p$

## 3.3 Redukcja

Def: $A, B \subseteq \Sigma^*$

$A$ redukuje się do $B$ ($A \leq B$), jeżeli istnieje totalna obliczalna funkcja $f$, taka że $x \in A$ wtw. $f(x) \in B$

Twierdzenie $A, B \subseteq \Sigma^*$, $A \leq B$

(i) Jeżeli $B$ jest rozstrzygalny, to $A$ rozstrzygalny

(ii) Jeżeli $A$ nie rozstrzygalny, to $B$ nie rozstrzygalny.

Dowód:

(i) Niech $B$ rozstrzygalny, czyli $\chi_B$ obliczalna.
Niech $f$ obliczalna, taka że $x \in A$ wtw. $f(x) \in B$
wtedy $\chi_B \circ f$ obliczalna (i totalna)
oraz $(\chi_B \circ f)(x) = 1$ wtw.
$\chi_B(f(x)) = 1$ wtw.
$f(x) \in B$ wtw.
$x \in A$

Przykład:

Niech $f(x) := (x, x)$.
Wtedy $f(x) \in H$ wtw.
$(x, x) \in H$ wtw.
$\phi_x(x)\downarrow$ wtw.
$x \in S$

czyli $S$ redukuje się do $H$
a więc $H$ nie rozstrzygalny (z (ii) wiedząc
że $S$ nie rozstrzygalny)

**Twierdzenie**

$A = \{x \mid Rng(\phi_x) = W\}$ nie jest rozstrzygalny.

**Dowód:**

Pokazujemy $S \leq A$.

Niech $h(x,y) := \begin{cases} y; & \phi_x(x)\downarrow \\ \uparrow; & \phi_x(x)\uparrow \end{cases}$

wtedy $h$ obliczalna, (bo $h(x,y)\uparrow$ jeżeli $\phi_x(x)\uparrow$).
czyli istnieje $p \in W$, taki że $\phi_p(x,y) = h(x,y)$.
a więc funkcja $f$, taka że $\phi_{f(x)}(y) = \phi_p(x,y)$
$= h(x,y)$.

Teraz

$x \in S \rightsquigarrow \phi_x(x)\downarrow \rightsquigarrow Rng(h) = W \rightsquigarrow f(x) \in A$

$x \notin S \rightsquigarrow \phi_x(x)\uparrow \rightsquigarrow Rng(h) = \emptyset \rightsquigarrow f(x) \notin A$

czyli $x \in S$ wtw. $f(x) \in A$

## 3.4 Przeliczalność

**Def:** $A \subseteq W$ jest przeliczalna, jeżeli istnieje funkcja obliczalna $f$, taka że $A = Rng(f)$

**Przykład:**

(i) $\{x \in W \mid x \text{ kwadrat}\}$ jest przeliczalna,
bo $f(x) := x^2$ jest obliczalna

(ii) $\emptyset$, $\Sigma^*$ są przeliczalne

(ii) $\{ f: \Sigma^* \rightsquigarrow \Sigma^* \mid f \text{ obliczalna} \}$ jest przeliczalna, ale
$\{ f: \Sigma^* \to \Sigma^* \mid f \text{ obliczalna} \}$ nie jest przeliczalna.

Twierdzenie: Równoważne są

(i) $A \subseteq \Sigma^*$ jest przeliczalny

(ii) istnieje obliczalna $f$, taka że $Dom(f) = A$

(iii) $A = \emptyset$ lub istnieje totalna obliczalna $f$, taka że $A = Rng(f)$.

Twierdzenie

$A \subseteq \Sigma^*$ jest przeliczalna wtw. istnieje maszyna Turinga $M$, która akceptuje $A$.

Twierdzenie

$A \subseteq \Sigma^*$ jest rozstrzygalny wtw. $A$ oraz $\overline{A}$ są przeliczalne.

Dowód:

"$\Rightarrow$" $\chi_A$ obliczalna, wtedy

$$f(x) := \begin{cases} x; & \chi_A(x) = 1 \\ \uparrow; & \chi_A(x) = 0 \end{cases} \quad i \quad g(x) := \begin{cases} \uparrow; & \chi_A(x) = 1 \\ x; & \chi_A(x) = 0 \end{cases}$$

są obliczalne
i $Def(f) = A$ oraz $Def(g) = \overline{A}$

"$\Leftarrow$" Niech $\emptyset \neq A \neq \Sigma^*$.

Wtedy istnieją $f, g: \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, takie że $A = Rng(f)$ i $\bar{A} = Rng(g)$,

czyli szukamy najmniejszego $z$, takiego że $x = f(z)$ lub $x = g(z)$:

$f$ i $g$ totalne, więc możemy obliczyć $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), \ldots$ w pewnym momencie (bo $x \in A \cup \bar{A}$) znajdujemy $z$, takie że $x = f(z)$ lub $x = g(z)$, czyli

$h(x) := \mu_z[x = f(z) \vee x = g(z)]$ jest obliczalna.

Stąd
$$G(x) := \begin{cases} 1; & f(h(x)) = x \\ 0; & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

też jest obliczalna, i mamy

$x \in A$ wtw. $\exists z: x = f(z)$
wtw. $h(x) = z$
wtw. $f(h(x)) = f(z) = x$
wtw. $G(x) = 1$

czyli $G = \chi_A$

## Twierdzenie

$\overline{H}$ nie jest przeliczalna.

Dowód:

Niech $f(x) := \phi_x(x)$. Wtedy $H = \{x \mid \phi_x(x)\downarrow\} = Def(f)$; czyli $H$ jest przeliczalny, ale nie rozstrzygalny.

Redukcja nadaje się też dla przeliczalności:

Twierdzenie $A, B \subseteq \Sigma^*$

Niech $A$ redukuje się do $B$.

(i) Jeżeli $B$ przeliczalny, to $A$ jest przeliczalny.

(ii) Jeżeli $A$ nie przeliczalny, to $B$ nie przeliczalny.

Dowód:

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$, taka że $x \in A$ wtw. $f(x) \in B$.

Wtedy $Def(h \circ f) = B$, dla $h: \Sigma^* \rightsquigarrow \Sigma^*$, takiej że $Def(h) = A$.

Przykład:

$A = \{ x \mid Rng(\phi_x) \text{ skończony} \}$ nie jest przeliczalny.

Niech

$$f_1(x,y) := \begin{cases} 0; & y = 0 \\ \uparrow; & y \neq 0 \end{cases} \qquad f_2(x,y) := y$$

wtedy $f_1, f_2$ obliczalny oraz $f_1(x,y) = f_2(x,y)$, jeżeli $f_1(x,y)\downarrow$.

Niech

$$g(x,y) := \begin{cases} f_1(x,y); & x \in \overline{H} \\ f_2(x,y); & x \in H \end{cases}$$

Uwaga: $g(x,0) = 0$ niezależny od $x \in H$, dlatego $g$ obliczalna:

obliczymy $\phi_x(x)$ i $f_1(x,y)$ równolegle.

Jeżeli obliczenie $\phi_x(x)$ skończy się wcześniej

niż obliczenie $f_1(x,y)$, to wracamy $f_2(x,y)$, (31)
bo $x \in H$. W innym przypadku wracamy
$f_1(x,y)$, który równa się $f_2(x,y)$, jeżeli $\phi_x(x)\downarrow$
czyli $x \in H$.
więc istnieje $h: \Sigma^* \to \Sigma^*$, taka że $\phi_{h(x)}(y) = g(x,y)$
oraz

$x \in \overline{H} \rightsquigarrow \phi_{h(x)}(y) = f_1(x,y) \rightsquigarrow Rng(\phi_{h(x)}) = \{0\} \rightsquigarrow h(x) \in A$

$x \in H \rightsquigarrow \phi_{h(x)}(y) = f_2(x,y) \rightsquigarrow Rng(\phi_{h(x)}) = \Sigma^* \rightsquigarrow h(x) \notin A$

czyli $x \in \overline{H}$ wtw. $h(x) \in A$, tzn. $\overline{H} \leq A$.
więc $A$ nie jest przeliczalny.

<u>Def:</u> $f, g: \Sigma^* \rightsquigarrow \Sigma^*$

$g$ jest rozszerzeniem $f$ ($f \subseteq g$), jeżeli
$Def(f) \subseteq Def(g)$ i $f(x) = g(x)$ dla wszystkich
$x \in Def(f)$.

<u>Def:</u> $A \subseteq \Sigma^*$.

$A$ jest zbiorem indeksów, jeżeli z $p \in A$ i
$\phi_p = \phi_q$ wynika $q \in A$ dla wszystkich $p, q \in \Sigma^*$.

## Twierdzenie

Niech $A$ będzie zbiorem indeksów, taki że istnieją $p, q \in \Sigma^*$, takie że

$$p \in A, \quad q \notin A, \quad \phi_p \subseteq \phi_q.$$

Wtedy $A$ nie jest przeliczalna.

Dowód:

Niech
$$g(x,y) := \begin{cases} \phi_p(y) & ; x \in \overline{H} \\ \phi_q(y) & ; x \in H \end{cases}$$

wtedy $g$ obliczalna, bo $\phi_p \subseteq \phi_q$; więc istnieje $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$, taka że

$$\phi_{h(x)}(y) = g(x,y) = \begin{cases} \phi_p(x); & x \in \overline{H} \\ \phi_q(x); & x \in H \end{cases}$$

czyli

$x \in \overline{H} \rightsquigarrow \phi_{h(x)} = \phi_p \rightsquigarrow h(x) \in A$, bo $p \in A$

$x \in H \rightsquigarrow \phi_{h(x)} = \phi_q \rightsquigarrow h(x) \notin A$, bo $q \notin A$

więc

$x \in \overline{H}$ wtw. $h(x) \in A$.

## Konsekwencja

Wszystkie (nietrywialne) semantyczne właściwości indeksów (programów) nie są rozstrzygalne.

## Twierdzenie

Niech $A$ będzie zbiorem indeksów, taki że $\emptyset \neq A \neq \Sigma^*$.
Wtedy $A$ nie jest rozstrzygalny.

**Dowód:**

istnieją $q \in A$ oraz $q' \notin A$.
Indeksy funkcji $f: \Sigma^* \rightsquigarrow \Sigma^*$, $f(x)\uparrow$ dla wszystkich $x \in \Sigma^*$ są w $A$ lub w $\overline{A}$.
Ponieważ $f \subseteq \phi_p$ dla wszystkich $p$, $A$ lub $\overline{A}$ nie jest przeliczalny.

Uwaga:
Własciwości "syntaktyczne", tak jak na przykład

$$\{(x,y) \mid \phi_x(y) \text{ może być obliczone w co najwyżej } t \text{ krokach}\},$$

$$\{x \mid \text{maszyna Turinga z kodowaniem } x \text{ ma } k \text{ stanów}\}$$

są rozstrzygalne.