Matematyka dla informatyków

Kombinatoryka

Wykład 14

Maciej Dziemiańczuk

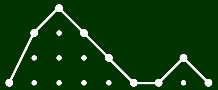
Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

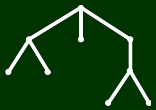
2024

Bijekcje i liczby Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

((()()))()(()())





Liczby Catalana

Liczby Catalana

Niech $(C_n)_{n\geq 0}$, gdzie

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{1}$$

Kolejne liczby Catalana

$$(C_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \ldots)$$

Asymptotyka

$$C_n \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

Liczby Catalana

Rekurencja

$$C_0 = 1, \qquad C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Funkcja tworząca

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Równanie funkcyjne

$$f(x) = 1 + x \cdot f(x)^2$$

Liczby Catalana zliczają

- Legalne nawiasowania
- Ścieżki Dycka
- Plane trees
- Ścieżki Łukasiewicza
- ...

Legalne nawiasowania

((())), (())(), ()(()), (()()), ()()()

Legalne nawiasowania

Definicja 1

Legalne nawiasowanie to taki ciąg P nawiasów otwierających (oraz zamykających), w którym w każdym prefiksie P liczba nawiasów otwierających jest nie mniejsza niż liczba nawiasów zamykających.

Niech p_n – liczba legalnych nawiasowań długości $2n$.

Przykład wszystkich legalnych nawiasowań długości 6

$$((())), \quad (())(), \quad ()(()), \quad (()()), \quad ()()().$$

Mamy zatem

$$(p_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 5, \ldots).$$

Legalne nawiasowania

Obserwacja 1

Mamy $p_0 = 1$ oraz dla $n \geq 1$

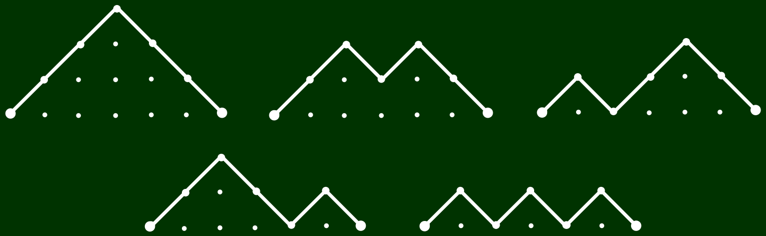
$$p_n = \sum_{i=1}^{n} p_{i-1} p_{n-i}.$$

Twierdzenie 1

Funkcja tworząca $P(x)$ ciągu (p_n) jest postaci

$$P(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}. \qquad (2)$$

Ścieżki Dycka

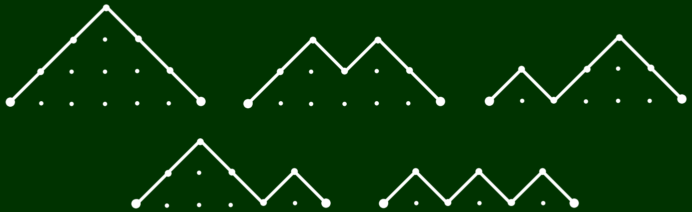


Ścieżki Dycka

Definicja 2

<u>Ścieżka Dycka</u> to ścieżka kratowa złożona z segmentów postaci $(1,1)=\nearrow$ oraz $(1,-1)=\searrow$, która kończy się na tym samym poziomie co się zaczyna i nie schodzi poniżej tego poziomu.

Przykład wszystkich ścieżek Dycka złożonych z 6 segmentów



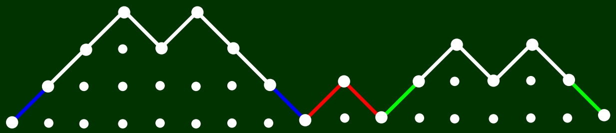
Ścieżki Dycka

Twierdzenie 2

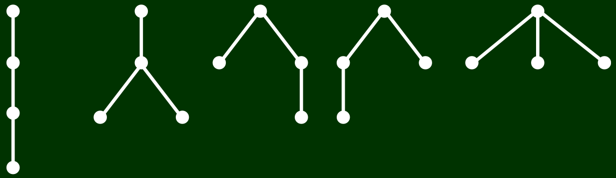
Liczba ścieżek Dycka złożonych z $2n$ segmentów jest równa n-tej liczbie Catalana C_n.

Dowód przez wskazanie bijekcji z legalnymi nawiasowaniami

$$((()()))()(()())$$



Plane trees

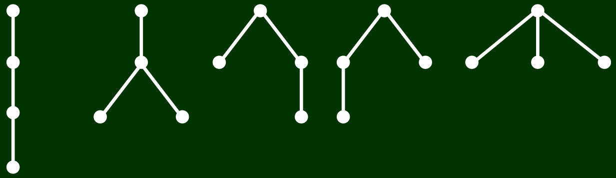


Plane trees

Definicja 3

Plane tree to nieetykietowane ukorzenione drzewo, w którym kolejność poddrzew dla każdego wierzchołka wewnętrznego jest ustalona.

Przykład wszystkich plane trees, które mają 3 krawędzie

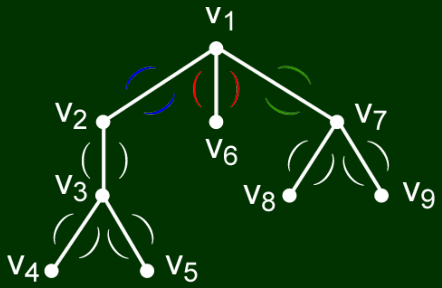


Plane trees

Twierdzenie 3

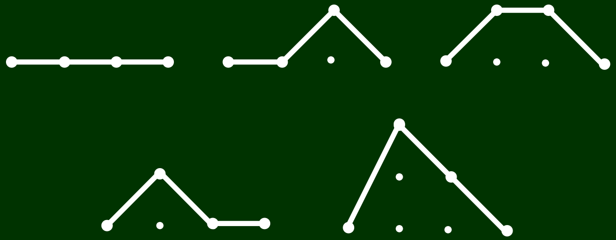
Liczba plane trees na n krawędziach jest równa n-tej liczbie Catalana C_n.

Dowód przez wskazanie bijekcji z legalnymi nawiasowaniami



$$((()()))()(()())$$

Ścieżki Łukasiewicza

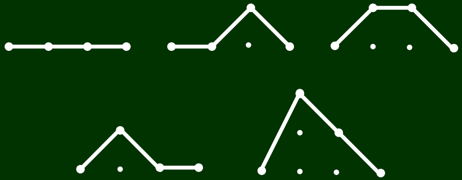


Ścieżki Łukasiewicza

Definicja 4

Ścieżka Łukasiewicza to ścieżka kratowa złożona z segmentów postaci $(1, k)$, gdzie $k \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$, która kończy się na tym samym poziomie, na którym się zaczyna i nie schodzi poniżej tego poziomu.

Przykład wszystkich ścieżek Łukasiewicza złożonych z 3 segmentów

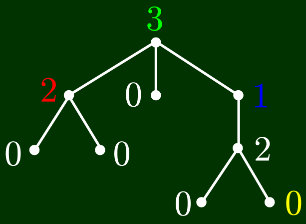


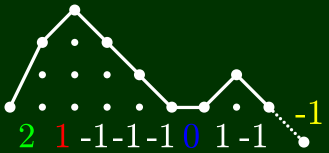
Ścieżki Łukasiewicza

Twierdzenie 4

Liczba ścieżek Łukasiewicza złożonych z n segmentów jest równa n-tej liczbie Catalana C_n.

Dowód przez wskazanie bijekcji z plane trees





Inne struktury . . .