Matematyka dla informatyków

Kombinatoryka

Wykład 1

Maciej Dziemiańczuk

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

2024

Kontakt

Maciej Dziemiańczuk

mdziemia@inf.ug.edu.pl

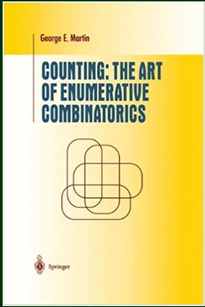
inf.ug.edu.pl/∼mdziemia

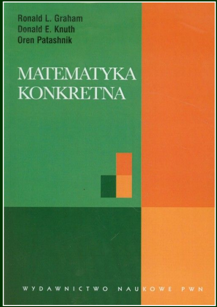
Zaliczenie

- Egzamin na ocenę

Literatura

- George E. Martin, **Counting: The Art of Enumerative Combinatorics**, Springer, 2001.
- Graham Ronald L., Knuth Donald E., Oren Patashnik, **Matematyka konkretna**, PWN, 2008.





Matematyka dla informatyków

Kombinatoryka

Co nas czeka . . .

Będziemy zliczać struktury

1. Ciągi
2. Zbiory
3. Podziały liczb
4. Podziały zbiorów
5. Rozmieszczenia kul w pudełkach
6. Kolorowania obiektów geometrycznych

Poznamy kilka technik

1. Zasadę mnożenia
2. Zasadę dodawania
3. Zasadę szufladkową
4. Zasadę włączeń-wyłączeń
5. Zasadę bijekcji
6. Technikę funkcji tworzących
7. Lemat Burnside'a

Wprowadzenie

Konwencja

<u>Przykład 1.</u> Na ile sposobów możemy wybrać:

a) 1 kulę spośród 4 kul czerwonych i 9 kul niebieskich?

b) 1 osobę spośród 4 kobiet i 9 mężczyzn?

- Kule danego koloru będą nierozróżnialne.
- Ludzie będą zawsze rozróżnialni.

<u>Przykład 2.</u> Ile miesięcy w roku ma 28 dni?

Zasada mnożenia

$$A \times B$$

Jeśli jedną czynność możemy wykonać na A sposobów, natomiast inną na B sposobów, to wykonanie obu tych czynności można wykonać na $A \cdot B$ sposobów.

Przykład 3. Na ile sposobów możemy wybrać kartę z talii 52 kart oraz rzucić kostką sześcienną?

Struktura

Ciągi liczbowe

$$\underbrace{(2, 3, 2, 1, 2, 5, 9, \dots, 4)}_{\text{n elementów}}$$

Ciągi liczbowe

$$\underbrace{(2, 3, 2, 1, 2, 5, 9, \ldots, 4)}_{\text{n elementów}}$$

Fakt 1

Weźmy dowolny zbiór A zawierający k elementów. Liczba ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gdzie $a_i \in A$ jest równa k^n.

Przykład 4. Ile jest ciągów binarnych długości 7?

Ciągi liczbowe

$$\underbrace{(\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \cdots, \_\_)}_{n \text{ elementów}}$$

Fakt 2

Mamy n skończonych zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gdzie

$$a_1 \in A_1, \qquad a_2 \in A_2, \qquad \ldots, \qquad a_n \in A_n$$

jest

$$|A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|.$$

Przykład 5. Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych?

Permutacje

Przykład permutacji zbioru 8-elementowego $\{1, 2, \dots, 8\}$:

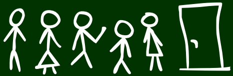
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Fakt 3

Liczba permutacji zbioru n elementowego wynosi

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Przykład 6. Na ile sposobów możemy ustawić 5 osób w kolejce do drzwi?



k-Permutacje

Przykład 5-permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$:

$$(5, 8, 3, 1, 4)$$

Fakt 4

Liczba k-permutacji zbioru n-elementowego wynosi

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}.$$

Przykład 7. Ile jest takich napisów długości 6 nad alfabetem łacińskim, w których litery się nie powtarzają?

Struktura

Zbiory liczbowe

$\{ 1, 3, 4, 5, 8 \}$

Podzbiory

Przykład 5-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, 8\}$:

$$\{1, 3, 4, 5, 8\} = \{5, 1, 3, 8, 4\}$$

Fakt 5

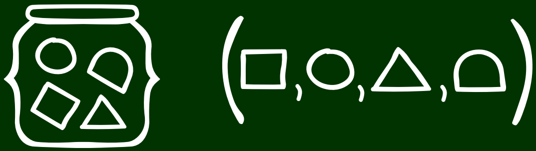
Liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Na przykład,

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35.$$

Wybory i ustawienia



Przykład 8. Na ile sposobów możemy:

a) wybrać 2 osoby spośród 4 osób?

b) ustawić 2 osoby spośród 4 osób?