Funkcja tworząca spełniająca równanie trzeciego stopnia

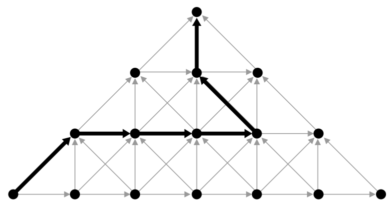
Przygotował: M. Dziemiańczuk*

22 maja 2014

Dla $n \geqslant 0$, niech p_n oznacza liczbę ścieżek kratowych z punktu $(0,0)$ do (n,n), które składają się z segmentów postaci $H=(1,0), V=(0,1), D=(1,1), S=(-1,1)$, oraz które dodatkowo leża na lub poniżej prostej $y=x$. Przyjmuje się, że istnieje jedna pusta ścieżka, zatem $p_0=1$. Dla przykładu, $p_1=3$, ponieważ mamy trzy takie ścieżki z punktu $(0,0)$ do $(1,1)$, tzn.

$$D, \quad HV, \quad HHS.$$

Inną taką przykładową ścieżką z punktu $(0,0)$ do $(3,3)$ jest ścieżka $DHHHSV$, która jest przedstawiona na Rys. 1.



Rysunek 1: Ścieżka $DHHHSV$ z punktu $(0,0)$ do $(3,3)$.

Zadania
W dalszej części odpowiemy na następujące pytania dotyczące ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. Jaka jest relacja rekurencyjna, którą spełnia ten ciąg?
2. Jaka jest funkcja tworząca?
3. Jaki jest wzór jawny na wyrazy tego ciągu?

Zadanie 1. *Ciąg liczb $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia następujące równanie rekurencyjne dla $n \geqslant 1$,*

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i p_{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} p_i p_j p_{n-i-j-1} \tag{1}$$

wraz z $p_0 = 1$.

Dowód. Zauważmy, że każda taka ścieżka do punktu (n,n) kończy się segmentem (i) D albo (ii) V albo (iii) S. W pierwszym przypadku pozostała część ścieżki to jedna ze ścieżek z punktu $(0,0)$ do $(n-1,n-1)$, których jest p_{n-1} z definicji. W drugim przypadku zauważ, że pozostała część ścieżki, oznaczmy ją przez π, musi zawierać co najmniej jeden segment H, czyli $\pi = \pi_1 H \pi_2$. Przy

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Gdański, `mdziemia at inf.ug.edu.pl`

odpowiednim doborze tego segmentu (który?) można pokazać, że π_1 jest ścieżką z punktu $(0,0)$ do pewnego (i,i), z kolei π_2 jest ścieżką z punktu $(i+1,i)$ do $(n,n-1)$, która nie wychodzi powyżej prostej $y = x - 1$. Sumując po $i = 0, 1, \ldots, n-1$, możemy pokazać, że wszystkich takich ścieżek (drugiego typu (ii)) jest $\sum_{i=0}^{n-1} p_i p_{n-1-i}$. Ostatni, trzeci przypadek rozpatrujemy podobnie jak drugi. □

Podajmy kilka pierwszych elementów tego ciągu:

$$(p_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 3, 18, 144, 1323, 13176, \ldots).$$

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(x)$ funkcję tworzącą ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, tzn.

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n\geqslant 0} p_n x^n.$$

Zadanie 2. *Funkcja tworząca $\mathcal{P}(x)$ ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ jest postaci*

$$\mathcal{P}(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{-2 + \frac{3}{x}} \sin\left\{\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{(36-7x)\sqrt{\frac{x}{3-2x}}}{-6+4x}\right)\right\}. \tag{2}$$

Dowód. Korzystając z (1) oraz prostych przekształceń na funkcjach tworzących (patrz np. Wilf [2]) możemy pokazać, że

$$\mathcal{P}(x) = 1 + x\mathcal{P}(x) + x\mathcal{P}(x)^2 + x\mathcal{P}(x)^3. \tag{3}$$

Wykorzystamy standardową procedurę znajdowania pierwiastków równania sześciennego. $\mathcal{P}(x)$ jest tym z trzech pierwiastków równania

$$\underbrace{x}_{a}\mathcal{P}(x)^3 + \underbrace{x}_{b}\mathcal{P}(x)^2 + \underbrace{(x-1)}_{c}\mathcal{P}(x) + \underbrace{1}_{d} = 0, \tag{4}$$

który w rozwinięciu w szereg potęgowy ma wolny wyraz równy $p_0 = 1$. Sprowadzamy równanie (4) do postaci kanonicznej

$$u^3 + pu + q = 0,$$

dzieląc obie strony przez a oraz podstawiając $u = \mathcal{P}(x) + b/(3a) = \mathcal{P}(x) + 1/3$, oraz

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x}, \qquad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3} = -\frac{7}{27} + \frac{4}{3x}.$$

Pierwiastkami równania są wtedy

$$\begin{aligned} u_k &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left\{\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - k\frac{2\pi}{3}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3-2x}{x}}\cos\left\{\frac{1}{3}\left[2k\pi + \arccos\left(\frac{(36-7x)\sqrt{\frac{x}{3-2x}}}{-6+4x}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, 2$.

Mamy $\lim_{x->0} u_0 = \infty$ oraz $\lim_{x->0} u_1 = -\infty$, natomiast dla $k = 2$ $\lim_{x->0} u_2 = 1$. Zatem u_2 jest szukanym pierwiastkiem równania kanonicznego. Wracając z podstawieniem pokazujemy, że $\mathcal{P}(x) = u_2 - 1/3$ jest rozwiązaniem równania (4) oraz funkcją tworzącą ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$. Ostateczny wzór upraszczamy wykorzystując symetrię między cos a sin. □

Uwaga. Postać jawna funkcji tworzącej może być wykorzystana do badania asymptotyki oraz wyprowadzania/dowodzenia tożsamości dla ciągu $(p_n)_{n=0}^{\infty}$.

Zadanie 3. *Dla* $n \geqslant 1$ *mamy*

$$p_n = \frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1-k}\binom{n}{k}\binom{n}{i}\binom{i}{n-1-k-i}3^{i+k}.$$

Dowód. Postać funkcji tworzącej $\mathcal{P}(x)$ jest zbyt skomplikowany, aby podejmować próbę poszukiwania rozwinięcia w szereg potęgowy. Skorzystamy z Twierdzenia Inwersyjnego Lagrange'a [2, Roz. 5.1], który umożliwia znalezienie wzoru jawnego dla liczb, których funkcja tworząca spełnia pewien rodzaj równania funkcyjnego.

Przypomnijmy, funkcja $\mathcal{P}(x)$ spełnia równanie (4). Podstawiając $u = u(x) = \mathcal{P}(x) - 1$ otrzymamy, że $u = x\phi(u)$, gdzie $\phi(u) = (u+1)(3+3u+u^2)$. Możemy skorzystać teraz z Twierdzenia Inwersyjnego Lagrange'a, tzn.

$$\begin{aligned}[x^n]u(x) &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left\{(u+1)^n(3+3u+u^2)^n\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\gamma(n, n-1-k),\end{aligned}$$

gdzie $\gamma(n,j) = [u^j](3+3u+u^2)^n$. Aby otrzymać $\gamma(n,j)$ korzystamy z twierdzenia dwumiennego i prostych przekształceń sum

$$\begin{aligned}\gamma(n,j) &= [u^j]\big(3+(3u+u^2)\big)^n\\ &= [u^j]\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^{n-i}(3+u)^i u^i\\ &= [u^j]\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^{n-i}\sum_{s=0}^{i}\binom{i}{s}3^{i-s}u^s u^i\\ &= [u^j]\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{s}3^{n-s}u^{s+i}\\ &= [u^j]\sum_{l=0}^{2n}\sum_{r=0}^{l}\binom{n}{r}\binom{r}{l-r}3^{n-l+r}u^l\\ &= \sum_{r=0}^{j}\binom{n}{r}\binom{r}{j-r}3^{n+r-j}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób współczynniki w rozwinięciu funkcji $u(x)$. Wróćmy z podstawieniem $\mathcal{P}(x) = u+1$, aby otrzymać wzór jawny dla p_n. □

Uwagi. Więcej na temat funkcji tworzących znajdziemy u Wilfa [2]. Przykład pochodzi z artykułu [1], w którym znajdziemy więcej na temat zliczania ścieżek kratowych złożonych z czterech segmentów.

Literatura

[1] M. Dziemiańczuk. Counting lattice paths with four types of steps. *Graphs and Combinatorics*, September 2013. In Press.

[2] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1994.