Równania rekurencyjne o stałych współczynnikach

Przygotował: M. Dziemiańczuk

30 kwietnia 2014

Liniowym równaniem rekurencyjnym rzędu p o stałych współczynnikach nazywa się równanie postaci

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_p x_{n-p}, \tag{1}$$

dla pewnych stałych $c_1, \ldots, c_p$. *Warunkiem początkowym* (brzegowym) równania (1) nazywa się równości określające początkowe p wyrazów ciągu $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$. *Rozwiązaniem równania rekurencyjnego* (1) nazywamy każdy ciąg liczbowy $(r_n)_{n \geqslant 0}$, który spełnia (1).

Fakt 1. *Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są rozwiązaniem* (1) *to dla dowolnych stałych A i B ich liniowa kombinacja $(Aa_n + Bb_n)$ jest również rozwiązaniem* (1). *Innymi słowy, zbiór ciągów będących rozwiązaniem* (1) *jest przestrzenią wektorową.*

Definicja 1. *Ciąg będący rozwiązaniem liniowego równania rekurencyjnego o stałych współczynnikach nazywa się ciągiem C-skończonym (C-finite sequences).*

Wskazówka. Więcej na temat ciągów C-skończonych znajdziemy w [1, Roz.4]. Okazuje się, że rodzina ciągów C-skończonych zamknięta jest na dodawanie, mnożenie po współrzędnych (Hadamard product), operację sum częściowych i inne.

Równanie charakterystyczne równania rekurencyjnego (1) to równanie postaci

$$x^p = c_1 x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \cdots + c_{p-1} x + c_p. \tag{2}$$

Twierdzenie 1. *Jeśli równanie charakterystyczne równania rekurencyjnego*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p} \tag{3}$$

ma p niezerowych parami różnych pierwiastków $r_1, r_2, \ldots, r_p$ oraz $n \geqslant p$, wtedy a_n jest postaci

$$a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n + \cdots + b_p r_p^n, \tag{4}$$

gdzie b_i są pewnymi stałymi.

Jeśli r jest pierwiastkiem wielokrotnym równania charakterystycznego o stopniu równym m (dla uproszczenia, przyjmijmy, że $r_1 = \cdots r_m = r$), wtedy zamieniamy w (4) wyrażenie

$$b_1 r_1^n + \cdots + b_m r_m^n$$

na

$$b_1 r^n + b_2 n r^n + b_3 n^2 r^n + \cdots b_m n^{m-1} r^n,$$

dla pewnych stałych $b_1, \ldots, b_m$.

Wskazówka. Jeśli r jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego to r jest również pierwiastkiem pochodnej równania. Dlatego nr^n jest rozwiązaniem rekurencji.

Przykład 1. Niech $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ oraz

$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}, \qquad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Równanie charakterystyczne jest postaci $x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)$. Mamy jeden pierwiastek dwukrotny (2) oraz jeden jednokrotny (-1). Zatem

$$a_n = a2^n + bn2^n + c(-1)^n,$$

gdzie a, b, c są ustalane z warunków początkowych

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 = a + c, \\ a_1 &= 2 = 2a + 2b - c, \\ a_2 &= -1 = 4a + 8b + c. \end{aligned}$$

Zatem $a = 1$, $b = -1/2$ oraz $c = -1$. Ostatecznie

$$a_n = 2^{n-1}(2-n) + (-1)^{n+1}, \qquad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Więcej przykładów w [2, §45]

Twierdzenie 2 ([1, Roz. 4])**.** *Ciąg* (a_n) *nad* $\mathbb{K}$ *spełnia*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}$$

dla pewnych stałych $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{K}$ *oraz* $c_p \neq 0$*, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = \frac{p(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_p x^p}$$

dla pewnego wielomianu $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ *stopnia co najwyżej* $p - 1$.

Przykład 2. Weźmy ciąg liczb Fibonacciego $(F_n)_{n \geqslant 0}$ zadany przez $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz spełniający

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0, \qquad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Wtedy

$$\sum_{n \geqslant 0} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Literatura

[1] M. Kauers and P. Paule. *The Concrete Tetrahedron.* SpringerWienNewYork, 2011.

[2] George E. Martin. *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2001.