

Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Instytut Informatyki

Praca magisterska

Problemy podziału wielowymiarowych pudełek

Maciej Dziemiańczuk

Promotor: dr Paweł Żyliński

Gdańsk, 2010

Spis treści

Spis treści	i
1 Zagadnienie tilingu	5
1.1 Podstawowe definicje	5
1.2 Problem tilingu	9
2 Warunki konieczne istnienia tilingu	11
2.1 Wariant ogólny	11
2.2 Tiling blokami hamornicznymi	13
3 Uogólniony problem tilingu	15
3.1 Wielowymiarowe F -pudełka	15
3.2 Struktura cobweb	17
3.3 Dowód istnienia tilingu	21
3.4 Uogólnione współczynniki dwumienne	24
4 Pokrycie dwoma rodzajami pudełek	27
4.1 Definicja wariantu	27
4.2 Charakteryzacja tilingu Bowera i Micheala	28
Bibliografia	34

Wstęp

Wyobraźmy sobie układankę “puzzle”, w której mamy pewien zbiór elementów, a naszym zadaniem jest tak je ułożyć, aby składały się na wcześniej ustalony wzór. Elementy te mogą przyjmować jeden wspólny kształt, mogą również być parami różne — ważne jest natomiast, by nie nachodziły na siebie wzajemnie.

Pojęcie *tilingu* jest takim formalnym opisem gry “puzzle” dla zupełnie abstrakcyjnych struktur. Swój początek ma już w topologii, w której to rozważa się pokrycia przestrzeni i zbiorów nad dowolnymi metrykami. Ale nie musimy uciekać się do tak wyrafinowanych przykładów — wielu ciekawych podsuwa nam matematyka dyskretna oraz teoria partycji. Tiling, czy też parkietaż, jest takim geometrycznym odpowiednikiem partycji zbioru skończonego, czyli rodziny parami rozłącznych podzbiorów, które w sumie dają cały zbiór. Zamiast zbiorów rozważa się figury geometryczne wraz z dodatkowymi operacjami, takimi jak obroty oraz translacje w pewnej d -wymiarowej przestrzeni.

W literaturze występuje wiele wariantów tilingu, najpopularniejszym z pewnością jest *domino*, czyli pokrywanie obszarów dwuwymiarowymi prostokątami postaci $1 \times n$ z wykorzystaniem operacji translacji oraz obrotów. Na uwagę zasługują parkietaże nieskończone, którymi zajmuje się krytalografia oraz intrygujące tilingi Penrose’a, które pokrywają płaszczyznę w sposób nieregularny — nie istnieje wzór, który można następnie nieskończenie wiele razy powtarzać tak, aby uzyskać tiling całej płaszczyzny.

Streszczenie pracy

W niniejszej pracy przyjrzymy się tilingowi wielowymiarowych pudełek o wymiarach dyskretnych $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d$, gdzie $A_i \in \mathbb{N}$ dla $i = 1, 2, \dots, d$, które następnie będziemy pokrywać mniejszymi blokami $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_d$ przy użyciu translacji oraz obrotów w \mathbb{N}^d .

W ogólności problem charakteryzacji tych pudełek, które posiadają tiling przy powyższych założeniach, jest problemem otwartym. Dlatego też w kolejnych rozdziałach skupimy się jedynie na wynikach dotyczących samego istnienia tilingu dla ustalonego pudełka i rodziny bloków. Dopiero na sam koniec pracy wprowadzimy modyfikację wariantu klasycznego, dla którego podamy kryteria konieczne i wystarczające na istnienia tilingu.

- Rozdział 1 jest wprowadzeniem do problemu tilingu. Zawiera definicje, które będą obowiązywały do końca pracy. Wprowadzonym oznaczeniom towarzyszą przykłady ilustrujące geometryczny aspekt zagadnienia.
- W rozdziale 2 przedstawiamy klasyczne wyniki oraz dowody dotyczące kryteriów istnienia tilingu pochodzące z pracy de Bruijn'a [3] z roku 1969. Omawiamy również własności tilingów związanych ze specyficznymi blokami harmonicznymi.
- Rozdział 3 zawiera fragment aktualnych badań nad uogólnionym problemem tilingu postawionym przez A. K. Kwaśniewskiego [11] w języku zbiorów częściowo uporządkowanych zwanych *cobweb posetami*. W szczególności prezentujemy dowód istnienia tilingu dla pewnej rodziny pudełek oraz pokazujemy ścisły związek liczby bloków stanowiących tiling z interpretacją kombinatoryczną uogólnionych współczynników dwumiennych.
- W ostatnim rozdziale 4 przedstawiamy wyniki Bowera i Micheala [1] z roku 2004 dotyczące pokrycia wielowymiarowych pudełek dwoma rodzajami pudełek bez możliwości obrotu. Podajemy pełną charakteryzację pudełek, które posiadają tiling przy tych założeniach.

Wykaz oznaczeń

Podstawowa symbolika

Podstawowe symbole i definicje zostały zapożyczone z podręczników [13, 14].

Symbol i definicja	
\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$[n]$	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
$n^{\underline{k}}$	$n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
$n^{\overline{k}}$	$n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$
$\binom{n}{k}$	liczba wszystkich k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego
$\mathcal{S}(n)$	rodzina permutacji zbioru $[n]$

Dla skrajnych przypadków przyjmuje się $0! = n^{\underline{0}} = n^{\overline{0}} = 1$ oraz $[0] = \emptyset$, itd.

Kwaśniewski upside-down notation

W rozdziale 3 poświęconym uogólnionemu wariantowi problemu tilingu została wykorzystana tak zwana notacja *upside-down* wprowadzona przez A. K. Kwaśniewskiego [10, 11]. Czytelnika zainteresowanego mnemotechniczną efektywnością notacji odsyłamy między innymi do Knutha [7] oraz do załącznika artykułu [12, Apendix 1].

Niech F_0, F_1, F_2, \dots będzie dowolnym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych oznaczonym krótko przez F .

Symbol i definicja	
n_F	F_n
$[n]_F$	$\{1_F, 2_F, 3_F, \dots, n_F\}$
$n_F!$	$n_F(n-1)_F \cdots 1_F$
$n_F^{\underline{k}}$	$n_F(n-1)_F \cdots (n-k+1)_F$
$n_F^{\overline{k}}$	$n_F(n+1)_F \cdots (n+k-1)_F$
$V_{k,n}$	$[k_F] \times [(k+1)_F] \times \cdots \times [n_F]$
V_m	$[1_F] \times [2_F] \times \cdots \times [m_F]$
$\binom{n}{k}_F$	$n_F! / (k_F!(n-k)_F!) = n_F^{\underline{k}} / k_F!$
$\mathcal{S}_F(n)$	rodzina permutacji zbioru $[n]_F$

Tak jak poprzednio, dla skrajnych przypadków przyjmuje się $0_F! = n_F^{\underline{0}} = n_F^{\overline{0}} = 1$ oraz $[0_F] = \emptyset$, itd.

Rozdział 1

Zagadnienie tilingu

1.1 Podstawowe definicje

Definicja 1.1. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Partycją zbioru A nazywamy rodzinę niepustych podzbiorów $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq A$ takich, że

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j.$$

Istotnym w definicji partycji jest rozłączność jej składników. Dzięki temu zachowujemy własność addytywności mocy zbiorów, tzn. zachodzi

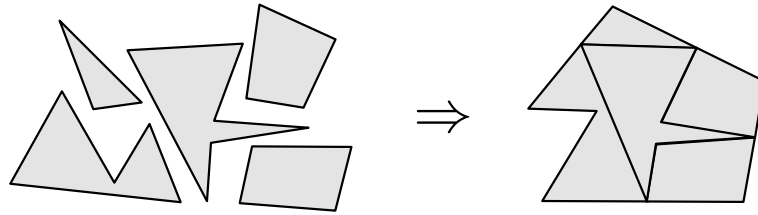
$$|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j|.$$

Istnieje oddzielny dział kombinatoryki poświęcony analizie partycji zbiorów, w której bada się między innymi istnienie partycji o zadanych własnościach oraz liczbę wszystkich różnych partycji.

Pojęcie *tilingu* jest odpowiednikiem partycji zbioru dla obiektów geometrycznych. Występuje cały szereg wariantów, w których rozpatruje się pokrycia skończone bądź nieskończone, oraz takie, które różnią się strukturą samych bloków stanowiących tiling.

Definicja 1.2. Niech będzie dana figura $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$, gdzie $d \in \mathbb{N}$. Zbiór niepustych bloków $B_1, B_2, \dots, B_d \subset \mathbb{R}^d$, które możemy dowolnie przesuwać i obracać w \mathbb{R}^d nazywamy tilingiem, jeżeli zachodzi

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^d B_i, \quad \text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) = \emptyset \text{ dla } i \neq j.$$



Rysunek 1.1: Przykład tilingu dwuwymiarowej figury.

Mimo iż ogólny wariant tilingu dotyczy skończenie wymiarowych podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^d , to w większości przypadków rozważania będziemy prowadzili na dyskretnej kracie punktów \mathbb{N}^d , gdzie $d \in \mathbb{N}$.

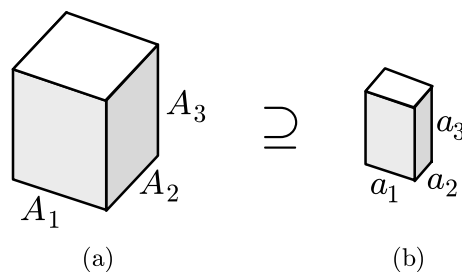
Wielowymiarowe pudełka

Zdefiniujemy teraz obiekty, które będziemy pokrywać, oraz ustalimy, jakiej postaci będą bloki, przy pomocy których będziemy dokonywali tego “parkietażu”.

Definicja 1.3. Niech dany będzie ciąg niepustych zbiorów A_1, A_2, \dots, A_d , gdzie $d \in \mathbb{N}$. Wówczas d -wymiarową kostką nazywamy iloczyn kartezjański

$$A_1 \times \dots \times A_d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Definicja 1.4. Niech dane będą dowolne d -wymiarowe kostki $\mathcal{A} = A_1 \times \dots \times A_d$ oraz $\mathcal{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_d$. Zbiór \mathcal{B} nazywamy blokiem kostki \mathcal{A} i oznaczamy przez $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jeżeli $B_i \subseteq A_i$ dla $i = 1, 2, \dots, d$.



Rysunek 1.2: Przykład pudełka i bloku trójwymiarowego.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że zbiory A_i zawierają kolejne liczby naturalne $A_i = \{1, 2, \dots, a_i\}$ dla $i = 1, 2, \dots, d$. Dlatego na oznaczenie wymiarów pudełek, czyli d -elementowych ciągów mocy kolejnych zbiorów A_i , dla uproszczenia notacji, zamiast $|A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_d|$, będziemy pisali $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d$.

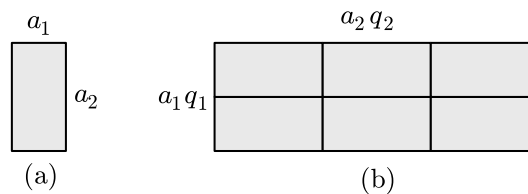
Bloki wielokrotne i harmoniczne

Definicja 1.5. Pudełko $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d$ nazywamy wielokrotnością bloku $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją współczynniki q_1, q_2, \dots, q_d oraz $\sigma \in \mathcal{S}(d)$ takie, że

$$A_{\sigma(i)} = q_i a_i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Przykład 1.1. Pudełko o wymiarach $7 \times 9 \times 10 \times 12$ jest wielokrotnością bloku $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ponieważ kolejne wymiary pudełka są wielokrotnością odpowiednich wymiarów bloku, tzn. $7 = 7 \cdot 1$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 5 \cdot 2$ oraz $12 = 3 \cdot 4$.

Przez pokrycie *trywialne* rozumiemy takie wypełnienie pudełka blokami, że każdy z bloków umiejscowiony jest w pudełku w tej samej orientacji (porównaj z rysunkiem 1.3). Jak łatwo sprawdzić, pudełko będące wielokrotnością danego bloku może być pokryte trywialnie.



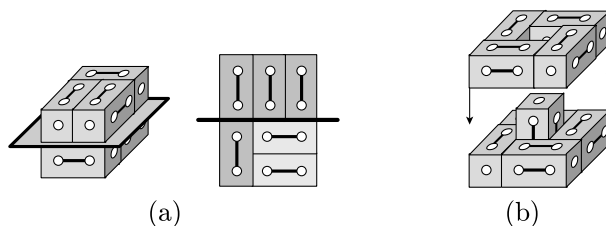
Rysunek 1.3: Przykład pudełka (b) będącego wielokrotnością bloku (a).

Definicja 1.6. Blok $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_d$ nazywamy harmonicznym, jeżeli wymiary tego bloku można ustawić w ciąg a'_1, \dots, a'_d taki, że $a'_1 | a'_2$, $a'_2 | a'_3$, \dots , $a'_{d-1} | a'_d$.

Przykład 1.2. Blok o wymiarach $2 \times 1 \times 6 \times 6$ jest blokiem harmonicznym, ponieważ możemy ustawić wymiary tego bloku w ciąg $(1, 2, 6, 6)$, który spełnia $1|2$, $2|6$ oraz $6|6$.

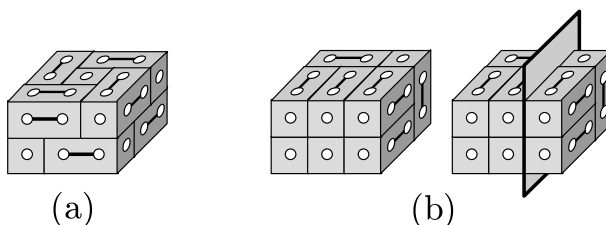
Tiling dwudzielny

Zdefiniujemy teraz specyficzne typy tilingów, które posłużą do produkcji całych rodzin tilingów. Jak się okaże w rozdziale 3, pokrycia te będą miały również związek z interpretacją kombinatoryczną wielu znanych ciągów liczb zadanych wzorami rekurencyjnymi.



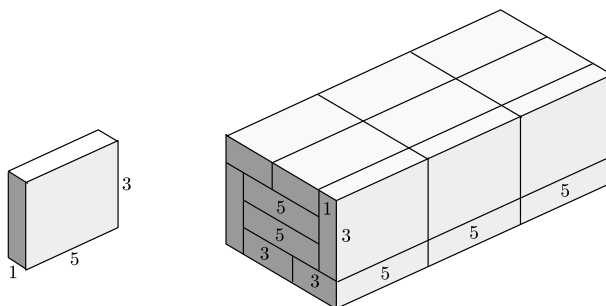
Rysunek 1.4: (a) Przykład tilingu dwudzielnego i (b) niedwudzielnego.

Definicja 1.7. *Tiling d -wymiarowego pudełka \mathcal{A} nazywamy dwudzielnym, jeżeli \mathcal{A} można “przeciąć” $(d-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyzną na dwa pudełka \mathcal{A}_1 oraz \mathcal{A}_2 bez przecinania żadnego z bloków, które tworzą tiling wyjściowy.*



Rysunek 1.5: Przykład dwóch typów tilingu tego samego pudełka.

Dla ustalonego pudełka i bloków istnienie tilingu dwudzielnego nie pociąga za sobą istnienia tilingu niedwudzielnego i odwrotnie. Weźmy przykładowo pudełko $2 \times 3 \times 3$ oraz bloki $1 \times 1 \times 2$. Wówczas rozważane pudełko posiada pokrycie zarówno dwudzielne jak i niedwudzielne — patrz rysunek 1.5. Natomiast pudełko o wymiarach $4 \times 15 \times 7$ może być pokryte blokami $1 \times 3 \times 5$ tylko w sposób niedwudzielny — patrz rysunek 1.6.



Rysunek 1.6: Przykład pudełka, które nie ma tilingu dwudzielnego.

1.2 Problem tilingu

Założmy, że mamy ustalone d -wymiarowe pudełko $\mathcal{A} = A_1 \times \cdots \times A_d$ oraz bloki postaci $\mathcal{B} = B_1 \times \cdots \times B_d$. Problem tilingu to zestaw poniższych kilku pytań, na które próbuje się udzielić odpowiedzi.

Czy istnieje tiling?

W ogólnym przypadku jest to pytanie o to, czy przy pomocy bloków \mathcal{B} , które możemy obracać i przesuwac w przestrzeni d -wymiarowej, można pokryć całe pudełko \mathcal{A} tak, aby bloki zawierały rozłączne fragmenty \mathcal{A} . Ale możemy również zapytać o istnienie tilingu o konkretnych własnościach, jak na przykład dwudzielność.

Liczba tilingów

Gdy udowodni się już istnienie tilingu, naturalnym wydaje się zapytać o liczbę wszystkich różnych takich pokryć. Odpowiedź bywa uzależniona od relacji *różności* pomiędzy tilingami. Czasami dwa tilingi uznaje za różne, gdy bloki użyte do pokrycia figury różnią się kształtem, a czasem — gdy jedynie orientacją.

Asymptotyka liczby tilingów

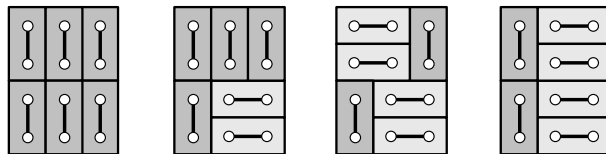
W problemie tilingu odpowiedź na pytanie o konkretną liczbę wszystkich tilingów rzadko kiedy jest znana. W niektórych sytuacjach wręcz niepotrzebna, wtedy pytamy o zachowanie asymptotyczne takich liczb.

Czy łatwo jest znaleźć tiling?

Dla niektórych wariantów problemu tilingu mamy proste kryteria na istnienie oraz konstrukcję przykładowego tilingu. W ogólności jednak problem tilingu już na poziomie dwuwymiarowym, gdy pokrywamy poziomymi $n \times 1$ i pionowymi $1 \times m$ prostokątami, jest problemem NP-zupełnym [2], dla $n \geq 2$ i $m > 2$.

Jak wyglądają typowe tilingi?

W przypadku twierdzeń o istnieniu tilingu zazwyczaj podane są przepisy na konstrukcję takich pokryć, zwanych *typowymi*. Są one dalej podstawą do tworzenia kolejnych parkietaży dzięki dodatkowym przekształceniom (patrz rysunek 1.7).



Rysunek 1.7: Produkcja nowych tilingów.

Rozdział 2

Warunki konieczne istnienia tilingu

2.1 Wariant ogólny

Wyniki niniejszego rozdziału pochodzą z pracy de Bruijn'a [3], który już w roku 1969 opublikował warunki konieczne do istnienia tilingu d -wymiarowej kostki bez dodatkowych założeń dotyczących struktury samego tilingu.

Twierdzenie 2.1. [de Bruijn, 1969] *Jeżeli pudełko $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d$ może być pokryte przy pomocy bloków $a_1 \times \dots \times a_d$, to co najmniej jeden z A_i musi być wielokrotnością a_1 , co najmniej jeden z A_i wielokrotnością a_2 , itd., $i = 1, 2, \dots, d$. Formalnie:*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\} \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ takie, } e \ a_i | A_j.$$

Dowód. Weźmy dowolne d -wymiarowe pudełko $\mathcal{A} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_d$, gdzie $d \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że możemy wypełnić \mathcal{A} blokami $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_d$. Oczywiście jest, że możemy wypełnić \mathcal{A} również blokami postaci $a_1 \times 1 \times \dots \times 1$, ponieważ każdy blok $a_1 \times \dots \times a_d$ możemy przedstawić za pomocą $a_2 a_3 \dots a_d$ bloków $a_1 \times 1 \times \dots \times 1$.

Podzielmy teraz każdy z tych zredukowanych bloków na a_1 najmniejszych d -wymiarowych klocków $1 \times \dots \times 1$. Pudełko \mathcal{A} zawiera teraz ich dokładnie $A_1 A_2 \dots A_d$. Każdy z tych klocków możemy przedstawić za pomocą współrzędnych dyskretnych

$$(k_1, k_2, \dots, k_d), \text{ gdzie } 1 \leq k_1 \leq A_1, \dots, 1 \leq k_d \leq A_d.$$

Rozważmy teraz sumę A współrzędnych na okręgu o promieniu jednostkowym, które tworzą A -wielobok foremny (patrz rysunek 2.1):

$$S(A) = \sum_{k=1}^A e^{2\pi i k/a_1},$$

a następnie iloczyn

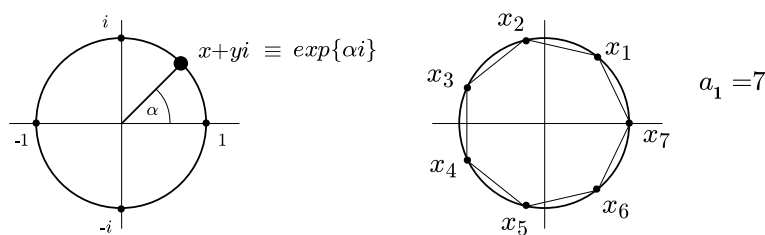
$$S(A_1) \cdots S(A_d) = \sum_{k_1=1}^{A_1} \cdots \sum_{k_d=1}^{A_d} e^{2\pi i k(k_1+\cdots+k_d)/a_1}. \quad (2.1)$$

Zauważmy, iż każdy ze składników $e^{2\pi i k(k_1+\cdots+k_d)/a_1}$ w powyższym iloczynie odpowiada dokładnie jednemu klockowi $1 \times \cdots \times 1$ o współrzędnych $(k_1, \dots, k_d) \in \mathcal{A}$. Możemy zatem pogrupować wszystkie te składniki w sumy odpowiadające każdemu z bloków postaci $a_1 \times 1 \times \cdots \times 1$ stanowiących tiling pudełka \mathcal{A} .

Rozważmy dowolną taką grupę. Składa się ona z a_1 składników (klocków jednostkowych) przyjmujących na jednej współrzędnej a_1 kolejnych wartości (warunek spójności bloku). Zatem wartość sumy liczb w takiej grupie wynosi zero z własności liczb zespolonych. Przypomnijmy bowiem, iż suma dowolnych k liczb zespolonych tworzących k -wielobok foremny o środku w początku układu współrzędnych równa jest zero (patrz rysunek 2.1). Formalnie, dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ oraz $a_1 \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{j=1}^{a_1} e^{2\pi i(c+j)/a_1} = 0.$$

Skoro suma w każdej grupie wynosi zero, zatem suma wielokrotna (2.1) również wynosi zero. Natomiast z iloczynowej postaci po prawej stronie równania (2.1) wnioskujemy, że musi istnieć taki indeks $j \in [n]$, dla którego mamy $S(A_j) = 0$.



Rysunek 2.1: Idea wykorzystania liczb zespolonych w dowodzie pokrycia.

Przedstawmy teraz $S(A_j)$ za pomocą poniższego szeregu geometrycznego

$$S(A_j) = x + x^2 + \cdots + x^{A_j} = x \frac{(x^{A_j} - 1)}{(x - 1)},$$

gdzie $x = e^{2\pi i/a_1}$. Wartość $S(A_j)$ wynosi zero, zatem musi zachodzić $x^{A_j} = 1$. Po podstawieniu za x odpowiedniej liczby zespolonej otrzymujemy warunek $e^{2\pi i A_j/a_1} = 1$. Aby on zachodził, liczba A_j musi być wielokrotnością a_1 , co należało wykazać. ■

Powyższe twierdzenie jest warunkiem koniecznym na istnienie tilingu, ale niewystarczającym. Weźmy przykładowo pudełko $2 \times 15 \times 7$ oraz bloki $1 \times 3 \times 5$. Mimo, iż założenia twierdzenia dotyczące wymiarów pudełka są spełnione, nie istnieje żądany tiling.

2.2 Tiling blokami hamornicznymi

Przedstawimy teraz dwa kolejne twierdzenia de Bruijna dotyczące warunków na istnienie tilingów związanych ze specyficznymi blokami *harmonicznymi*.

Twierdzenie 2.2. [de Bruijn, 1969] *Założmy, że d -wymiarowe pudełko \mathcal{A} może być wypełnione blokami harmonicznymi $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_d$. Wtedy \mathcal{A} jest wielokrotnością tego bloku.*

Dowód. Skorzystamy z indukcji po liczbie wymiarów $d \in \mathbb{N}$. Dla $d = 1$ twierdzenie zachodzi trywialnie. Założmy zatem, że zachodzi dla dowolnego $1 \leq d' < d$ i rozważmy przypadek d -wymiarowy.

Skoro bloki, które posłużą do wypełnienia pudełka są harmoniczne, bez straty ogólności możemy założyć, że zachodzi $a_1|a_2, a_2|a_3, \dots, a_{d-1}|a_d$. Weźmy pudełko $\mathcal{A} = A_1 \times \cdots \times A_d$. Z twierdzenia 2.1 wiemy, że istnieje taki A_j , który jest wielokrotnością a_d , gdzie $j \in [d]$. Założmy, że $j = d$, to znaczy $a_d|A_d$.

Rozważmy $(d-1)$ -wymiarową hiperpłaszczyznę $A_1 \times \cdots \times A_{d-1}$. Z założenia twierdzenia jest ona wypełniona przez $(d-1)$ -wymiarowe bloki postaci $a_2 \times \cdots \times a_d$ i/lub $a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_d$, itd. Z własności bloków harmonicznych otrzymujemy, że każdy z nich może być z kolei podzielony na bloki postaci $a_1 \times \cdots \times a_{d-1}$.

Mamy zatem pudełko $A_1 \times \cdots \times A_{d-1}$ wypełnione blokami $a_1 \times \cdots \times a_{d-1}$. Z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że to pudełko jest wielokrotnością swoich bloków. Przypomnijmy, że mamy $a_d|A_d$, a zatem całe pudełko $A_1 \times \cdots \times A_d$ jest także wielokrotnością, w tym przypadku pudełka $a_1 \times \cdots \times a_d$, co należało dowieść. ■

Ostatni z wyników wyżej wymienionej, klasycznej już pracy de Bruijna [3], dotyczy tilingów dwudzielnych. Mówi on o istnieniu dwudzielnych parkietaży pudełek, które mogą być wypełnione przez bloki nieharmoniczne.

Twierdzenie 2.3. [de Bruijn, 1969] *Jeżeli d -wymiarowy blok o wymiarach $a_1 \times \cdots \times a_d$ nie jest harmoniczny, to istnieje pudełko, które posiada tiling dwudzielny z wykorzystaniem tych bloków.*

Dowód. Niech $d > 1$ oraz $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_d$. Z założenia bloki $a_1 \times \cdots \times a_d$ nie są harmoniczne, (\star) a zatem istnieje takie k , dla którego a_{k-1} nie dzieli a_k ; weźmy największe takie k , $2 \leq k \leq d$.

Łatwo pokazać, że pudełko $(a+b) \times ab$ może być wypełnione blokami $a \times b$. Analogicznie, pudełko

$$\mathcal{A} = a_1 \times \cdots \times a_{k-2} \times (a_{k-1} + a_k) \times a_{k-1}a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_d$$

może być również wypełnione blokami $a_1 \times \cdots \times a_d$. Pokażemy teraz, że pudełko \mathcal{A} nie może być wielokrotnością tych bloków (nie może być przez nie wypełnione trywialnie).

Niech j będzie najmniejszym indeksem takim, że $a_j = a_{k-1}$. Wtedy z (\star) mamy, że żadna z liczb $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{k-1} + a_k$ nie jest podzielna przez żadną z liczb $a_j, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_d$. Zauważmy również, że $a_j = \cdots = a_{k-1}$ oraz $a_{k-1} + a_k$ nie dzieli się przez a_{k-1} i a_k ani przez żadną wielokrotność a_k . Ze względu na sposób, w jaki został wybrany k na początku dowodu (k oznacza największy indeks przy którym “psuje się własność harmoniczności bloku”), mamy, że a_{k+1}, \dots, a_d są wielokrotnościami a_k .

Jeżeli pudełko $A_1 \times \cdots \times A_d$ jest wielokrotnością bloku $a_1 \times \cdots \times a_d$, wtedy istnieje co najwyżej $(j-1)$ indeksów i takich, że A_i nie jest wielokrotnością żadnej z liczb a_j, \dots, a_d . Natomiast w naszym przypadku takich indeksów może być równo lub więcej niż j , co przeczy wielokrotności skonstruowanego pudełka i jednocześnie kończy dowód. ■

Rozdział 3

Uogólniony problem tilingu

W tym rozdziale przyjrzymy się uogólnionemu problemowi tilingu wielowymiarowych pudełek. Wprowadzimy nieskończony ciąg liczb naturalnych, który będzie odpowiadał wymiarom pudełek oraz bloków, którymi będziemy pokrywali pudełka. Wykażemy, że pewna rodzina pudełek posiada tiling. Do dowodu wykorzystamy tzw. grafy *cobweb* wprowadzone przez A. K. Kwaśniewskiego [10, 11]. Następnie powiemy o związku tego problemu z interpretacją kombinatoryczną szerokiej rodziny liczb kombinatorycznych, zawierającej między innymi współczynniki dwumienne, Gaussowskie oraz p, q -współczynniki. Terminologia i oznaczenia tego rozdziału pochodzą z [5, 10, 11].

3.1 Wielowymiarowe F -pudełka

Idea wielowymiarowych pudełek, których wymiary opisane są przez nieskończony ciąg liczb naturalnych, pojawiła się w artykule [12] jako równoważna reprezentacja struktur *cobweb*, o których będzie mowa w następnym paragrafie.

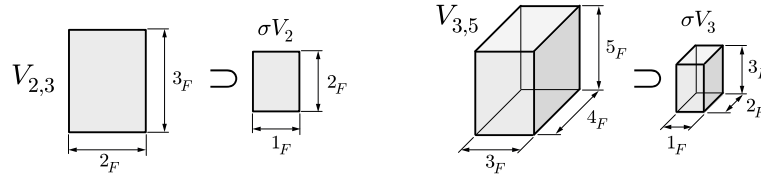
Do końca niniejszego rozdziału przyjmijmy oznaczenie $F = \{n_F\}_{n \geq 0}$ na dowolny ciąg nieujemnych liczb całkowitych.

Definicja 3.1. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \leq n$ i niech $m := n - k + 1$. Iloczyn kartezyjski

$$V_{k,n} = [k_F] \times [(k+1)_F] \times \cdots \times [n_F]$$

nazywamy m -wymiarowym F -pudełkiem i oznaczamy przez $V_{k,n}$.

Definicja 3.2. Niech $\sigma \in \mathcal{S}_F(m)$, gdzie $m \in \mathbb{N}$. Wówczas m -wymiarową F -kostkę $V_{1,m}$ postaci $\sigma V_m = B_1 \times \cdots \times B_m$, gdzie $|B_i| = \sigma(i)_F$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, nazywamy m -wymiarowym blokiem i oznaczamy przez σV_m .



Rysunek 3.1: Przykład F -pudełek i bloków.

Zauważmy, że F -kostka $V_{k,n}$ to produkt m zbiorów $[k_F], [(k+1)_F], \dots, [n_F]$, natomiast blok σV_m to iloczyn m zbiorów począwszy od $[1_F]$ aż do $[m_F]$ z dokładnością do permutacji czynników wyznaczoną przez $\sigma \in \mathcal{S}_F(m)$ (orientacja w przestrzeni), przy czym ilość czynników w obu strukturach musi się zgadzać (warunek zgodności wymiaru pudełka i bloku). Dlatego mówiąc o dowolnym pudełku $V_{k,n}$ oraz blokach σV_m zakładamy, że $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ oraz $m = n - k + 1$.

Przez objętość F -pudełka $V_{k,n} \in \mathbb{N}^m$ będziemy rozumieć ilość kostek jednostkowych postaci $1 \times \cdots \times 1$ i oznaczali przez $|V_{k,n}|$; analogicznie dla bloków σV_m . Jak łatwo pokazać, objętość F -pudełka $V_{k,n}$ wynosi

$$|V_{k,n}| = k_F(k+1)_F \cdots n_F = n_F^m,$$

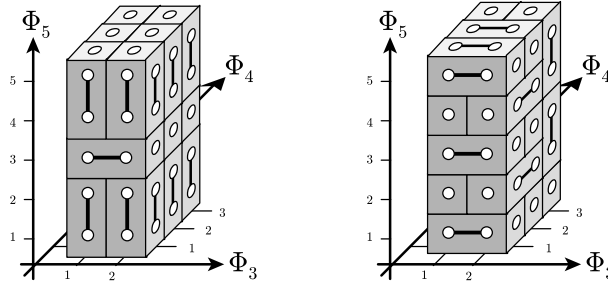
natomiast objętość bloku σV_m wynosi

$$|\sigma V_m| = |V_m| = 1_F 2_F \cdots m_F = m_F!.$$

Definicja 3.3. Niech dane będzie m -wymiarowe pudełko $V_{k,n}$. Zbiór rozłącznych bloków postaci $\sigma V_m \subseteq V_{k,n}$, których suma daje całe pudełko, nazywamy tilingiem pudełka $V_{k,n}$.

Przykład 3.1. Weźmy ciąg liczb Fibonacciego $F = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$. Przykładowe tilingi trójwymiarowego pudełka $V_{3,5}$ o wymiarach $2 \times 3 \times 5$ blokami σV_3 o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ zostały przedstawione na rysunku 3.2.

Mając już zdefiniowane pojęcie tilingu F -pudełek i odpowiadających im bloków, możemy wprowadzić uogólniony problem parkietażu wielowymiarowych F -pudełek postawiony przez A. K. Kwaśniewskiego w pracy [11].

Rysunek 3.2: Przykładowe tilingi F -pudełka $V_{3,5}$.

Problem 1. Niech będzie dany ciąg F . Czy każde F -pudełko posiada tiling?

Problem ten jest jednocześnie pytaniem o rodzinę takich ciągów F , które opisują F -pudełka posiadające tiling.

Definicja 3.4. Ciąg F nazywamy tilingowym, jeżeli dowolne F -pudełko $V_{k,n}$ opisane przez ten ciąg posiada tiling.

Znalezienie wszystkich ciągów tilingowych jest problemem otwartym. Wiadomo natomiast, że do takiej rodziny należy m.in. ciąg liczb naturalnych, q -Gaussowskich oraz Fibonacciego. Do przedstawienia dowodu na istnienie pokrycia dla pudełek opisanych tymi ciągami wykorzystamy specyficzne grafy *cobweb*, które omówimy w następnym podrozdziale.

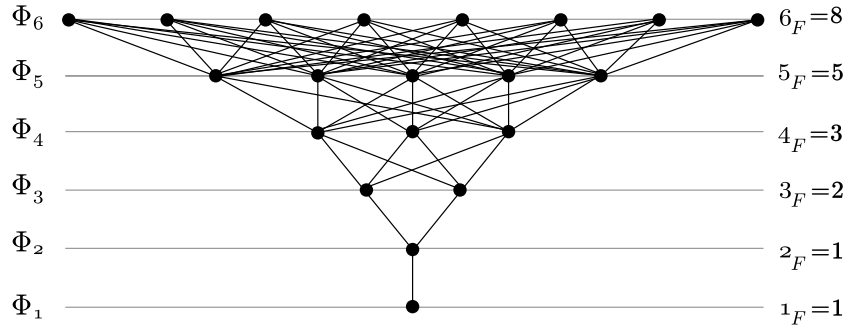
3.2 Struktura cobweb

Mając ustalony ciąg $F = (0_F, 1_F, 2_F, \dots)$ nieujemnych liczb całkowitych, oznaczmy przez Φ_s zbiór $\{1, 2, \dots, s_F\}$ oraz nazwijmy go *poziomem*; dla skrajnego przypadku, gdy $s = 0$, przyjmujemy $\Phi_0 = \{\emptyset\}$. Zdefiniujemy teraz dwie podstawowe struktury cobweb: *warstwę* oraz *bloki*, które będą pełniły rolę naszych pudełek oraz bloków przy konstrukcji tilingu.

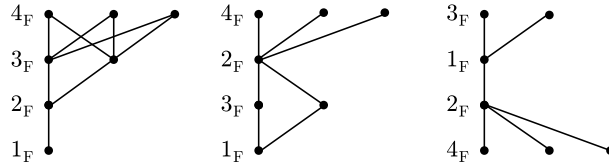
Definicja 3.5. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \leq n$. Graf prosty (V, E) , gdzie

$$V = \bigcup_{i=k}^n \Phi_i, \quad E = \{(v, w) : v \in \Phi_i \wedge w \in \Phi_{i+1}, i = k, \dots, n-1\},$$

nazywamy warstwą cobweb i oznaczamy symbolem $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$.


 Rysunek 3.3: Warstwa cobweb $\langle \Phi_1 \rightarrow \Phi_6 \rangle$ dla ciągu liczb Fibonacciego.

Definicja 3.6. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz $\sigma \in \mathcal{S}_F(m)$. Warstwę $\langle \phi_1 \rightarrow \phi_m \rangle$ o m poziomach ϕ_1, \dots, ϕ_m taką, że $|\phi_i| = \sigma(i)_F$ dla $i = 1, 2, \dots, m$; nazywamy cobweb blokiem i oznaczamy symbolem σP_m .


 Rysunek 3.4: Przykład bloków cobweb σP_4 dla ciągu liczb Fibonacciego.

Zauważmy, że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $k \leq n$, warstwa cobweb $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$ to ciąg $m = n - k + 1$ kolejnych poziomów od Φ_k do Φ_n , tzn. $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle \equiv \langle \Phi_k, \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_n \rangle$, natomiast dowolny blok σP_m jest ciągiem m poziomów począwszy od pierwszego ϕ_1 do ϕ_m , tzn. $\sigma P_m \equiv \langle \phi_1, \dots, \phi_m \rangle$.

Symbolem $C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle)$ oznaczmy zbiór łańcuchów maksymalnych warstwy $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$. Formalnie:

$$C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle) = \{(v_1, v_2, \dots, v_m) : v_i \in \Phi_{k+i-1}, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Analogicznie definiujemy $C(\sigma P_m)$ dla bloków σP_m .

Obserwacja 3.1. Rozważmy dowolną warstwę cobweb $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$ oraz bloki σP_m wyznaczone przez ciąg F , gdzie $m = n - k + 1$. Wtedy moc zbioru łańcuchów maksymalnych wynosi odpowiednio

$$|C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle)| = k_F(k+1)_F \cdots n_F = n_F^{\frac{m}{F}} \quad (3.1)$$

$$|\sigma P_m| = 1_F 2_F \cdots m_F = m_F! \quad (3.2)$$

Dowód. Jest to proste spostrzeżenie z pracy [11] wynikające z konstrukcji struktury cobweb, w której na k -tym poziomie Φ_k znajduje się k_F elementów, dla $k \in \mathbb{N}$. ■

Mówimy, że dwa bloki σP_m oraz $\sigma P'_m$ są *rozłączne* wtedy i tylko wtedy, gdy ich zbiory łańcuchów maksymalnych są rozłączne, tzn.

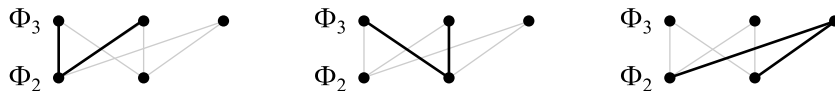
$$\sigma P_m \cap \sigma P'_m = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad C(\sigma P_m) \cap C(\sigma P'_m) = \emptyset.$$

Definicja 3.7. Niech dana będzie warstwa cobweb $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$. Rodzinę parami rozłącznych bloków B_1, B_2, \dots, B_L postaci σP_m taką, że

$$C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle) = \bigcup_{i=1}^L C(B_i),$$

nazywamy tilingiem warstwy $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$.

Przykład 3.2. Niech $N = (0, 1, 2, 3, \dots)$. Rozważmy warstwę cobweb $\langle \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rangle$ wyznaczoną przez ciąg N . Przykładowy tiling blokami postaci σP_2 prezentuje rysunek 3.5.



Rysunek 3.5: Przykład tilingu warstwy cobweb $\langle \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rangle$.

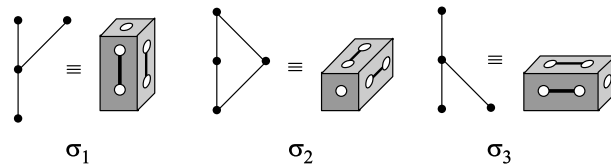
Obserwacja 3.2. Dla dowolnego ciągu F oraz $n, k \in \mathbb{N}$ takich, że $k \leq n$, mamy odpowiedniość

$$\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle \equiv V_{k,n}.$$

Dowód. Weźmy ciąg F oraz liczby naturalne n, k takie, że $k \leq n$. Należy pokazać, że warstwie cobweb $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$ odpowiada dokładnie jedno F -pudełko $V_{k,n}$ i vice versa. W tym celu wystarczy zauważyć, że zbiór łańcuchów maksymalnych $C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle)$ warstwy cobweb $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$ odpowiada zbiorowi punktów jednostkowych postaci $1 \times \dots \times 1$ F -pudełka $V_{k,n}$, to znaczy

$$C(\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle) \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in V_{k,n}\},$$

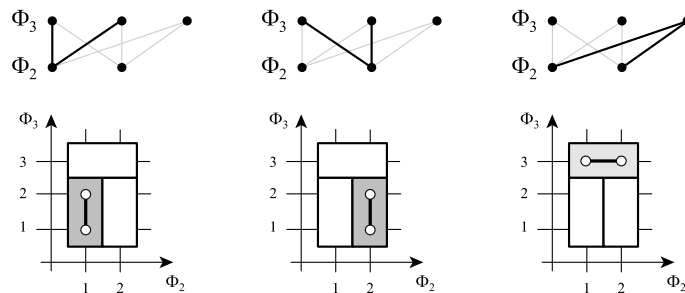
gdzie $m = n - k + 1$. ■



Rysunek 3.6: Cobweb bloki σP_3 i odpowiadające im σV_3 .

Powyższa obserwacja, pochodząca z pracy o metodach reprezentacji struktury cobweb [12], pokazuje, że grafy cobweb kodują wielowymiarowe F -pudełka, a zatem problem tilingu pudełek sprowadza się do problemu pokrycia warstwy cobweb przez odpowiednie cobweb bloki.

Przykład 3.3. Niech F będzie ciągiem kolejnych liczb Fibonacciego. Rodzina cobweb bloków σP_3 i odpowiadających im geometrycznych bloków σV_3 została zaprezentowana na rysunku 3.6.



Rysunek 3.7: Odpowiedniość pomiędzy tilingiem warstwy cobweb $\langle \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rangle$ a F -pudełka $V_{2,3}$.

3.3 Dowód istnienia tilingu

Niech λ, ρ oznaczają funkcje $\lambda, \rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Symbolem \mathcal{T}_λ oznaczmy rodzinę ciągów $F[\lambda, \rho] \equiv \{n_F\}_{n \geq 0}$ takich, że dla ustalonego elementu n_F ciągu $F[\lambda, \rho]$ zachodzi

$$n_F = (i + j)_F = \lambda(i, j) \cdot i_F + \rho(i, j) \cdot j_F \quad (3.3)$$

dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}_0$, takich że $i + j = n$. Można pokazać, że funkcje współczynników λ, ρ w pełni wyznaczają ciąg F .

Przykład 3.4. Ciągami, które należą do rodziny \mathcal{T}_λ są między innymi:

1. Ciąg liczb naturalnych $N = (0, 1, 2, 3, \dots)$, ze współczynnikami $\lambda = \rho = 1$, który trywialnie spełnia

$$n_N = (k + m)_N = k_N + m_N.$$

2. Ciąg liczb Fibonacciego $\mathcal{F} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$, gdzie

$$\lambda(k, m) = (m + 1)_{\mathcal{F}}, \quad \rho(k, m) = (k - 1)_{\mathcal{F}}.$$

3. Ciąg liczb Gaussowskich z parametrem $1 \neq q \in \mathbb{N}$ zadany wzorem $n_q = (q^n - 1)/(q - 1)$, którego współczynniki λ, ρ przyjmują postać

$$\lambda(k, m) = q^m, \quad \rho(k, m) = 1.$$

Twierdzenie 3.1. *Ciąg $F \in \mathcal{T}_\lambda$ jest ciągiem tilingowym.*

Dowód. Dowód twierdzenia pochodzi z pracy [6] i w głównej mierze korzysta z własności (3.3) dla ciągów z rodziny \mathcal{T}_λ . A dokładniej, aby skorzystać z (3.3), zauważmy, iż wykazanie istnienia tilingu dla dowolnej warstwy $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_n \rangle$, $1 \leq k \leq n$, blokami σP_m , gdzie $m = n - k + 1$, równoważne jest wykazaniu istnienia tilingu dla dowolnej warstwy $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_n \rangle$, $0 \leq k < n$, blokami σP_m , gdzie $m = n - k$.

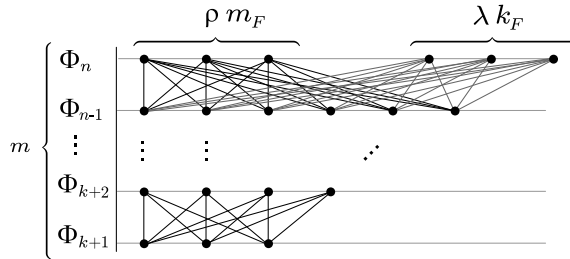
Dowód oprzemy na indukcji względem n . Weźmy dowolny ciąg $F \in \mathcal{T}_\lambda$ oraz cobweb warstwę $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_n \rangle$, $0 \leq k < n$. Dla $n = 1$ ($k = 0$) mamy trywialne pokrycie warstwy $\langle \Phi_1 \rightarrow \Phi_1 \rangle$ blokami σP_1 . Załóżmy zatem, że dla $1 \leq n' < n$ wszystkie warstwy $\langle \Phi_{k'+1} \rightarrow \Phi_{n'} \rangle$, gdzie $0 \leq k' < n'$ posiadają żądany tiling blokami $\sigma P_{m'}$ oraz $m' = n' - k'$.

Jeżeli $k = 0$, wówczas $\langle \Phi_1 \rightarrow \Phi_n \rangle$ posiada tiling jednym blokiem σP_m z definicji, gdzie $m = n$. Rozważmy zatem $1 \leq k < n$ oraz warstwę $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_n \rangle$ o m poziomach $\Phi_{k+1}, \dots, \Phi_n$. Weźmy ostatni poziom Φ_n , który zawiera dokładnie n_F elementów. Z definicji rodziny \mathcal{T}_λ , do której należy ciąg F , mamy, że $n_F = \lambda \cdot k_F + \rho \cdot m_F$ przy pewnych współczynnikach λ i ρ , które określają F . Zatem podzielmy warstwę $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_n \rangle$ na dwie rozłączne podwarstwy A oraz B , takie że

$$A = \langle \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \phi_A \rangle, \text{ gdzie } \phi_A = \{1, 2, \dots, \rho(m, k) \cdot m_F\},$$

$$B = \langle \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \phi_B \rangle, \text{ gdzie } \phi_B = \Phi_n \setminus \phi_A,$$

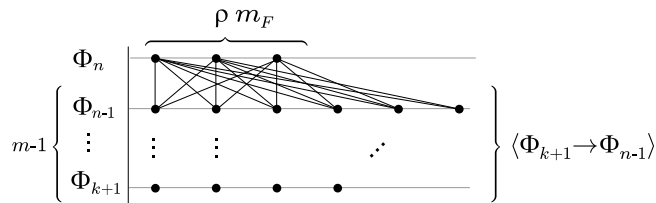
które rozpatrzmy niezależnie w dwóch kolejnych krokach (patrz rysunek 3.8).



Rysunek 3.8: Idea dowodu twierdzenia 3.1.

Krok 1: Pokrycie warstwy A.

Zauważmy, że pierwsze $(m-1)$ poziomów warstwy A definiuje $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_{n-1} \rangle$ i na mocy założenia indukcyjnego może być pokryta blokami σP_{m-1} . Jeśli natomiast przyłączymy do każdego takiego bloku m -ty poziom o m_F elementach z warstwy ϕ_A , możemy pokryć całą warstwę A blokami σP_m (patrz rysunek 3.9).

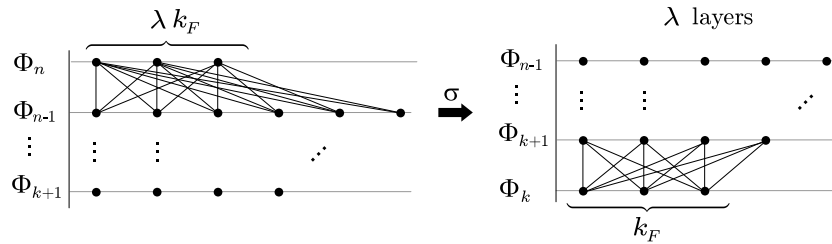


Rysunek 3.9: Podwarstwa A .

Krok 2: Pokrycie warstwy B.

Poziom ϕ_B zawiera $\lambda(k, m) \cdot k_F$ elementów, to znaczy $\lambda(k, m)$ razy więcej niż Φ_k ,

przy czym $k \geq 1$ z założenia. Zatem podzielimy warstwę B na $\lambda(k, m)$ warstw $\langle \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_k^i \rangle$, gdzie $\Phi_k^i = \{(i-1) \cdot k_F + 1, (i-1) \cdot k_F + 2, \dots, i \cdot k_F\}$ dla $i = 1, 2, \dots, \lambda(k, m)$. Podczas pokrywania możemy używać cobweb bloków o różnej kolejności poziomów, umożliwiając nam to permutacje σ na zbiorze poziomów. Zatem istnieje taka permutacja, która zmieni kolejność poziomów warstwy $\langle \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{n-1}, \Phi_k^i \rangle$ tak, aby otrzymać warstwę $\langle \Phi_k^i, \Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{n-1} \rangle$. Korzystając z kolei z założenia indukcyjnego dla $1 \leq n' < n$ otrzymujemy, że ta warstwa również posiada tiling blokami σP_m (patrz rysunek 3.10).



Rysunek 3.10: Podwarstwa B .

Podzieliśmy warstwę $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_n \rangle$ na dwie rozłączne rodziny podwarstw i przeprowadziliśmy tiling dla każdej z osobna korzystając z założenia indukcyjnego dla mniejszych warstw. Zatem wyjściowa warstwa również posiada tiling. ■

Wniosek 3.1. *Każde pudełko $k \times (k+1) \times \dots \times n$ może być pokryte blokami o wymiarach $1 \times 2 \times \dots \times m$, gdzie $m = n - k + 1$, dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.*

Dowód. Jest to prosty wniosek z twierdzenia 3.1 dla ciągu liczb naturalnych. ■

Typowe tilingi F -pudełek

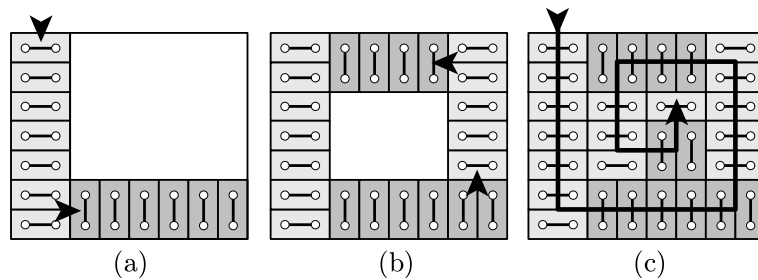
Algorytm z twierdzenia 3.1 konstruuje rekurencyjnie regularne pokrycia tworząc pewnego rodzaju spirale. W kolejnych iteracjach dokonuje podziału pudełka A składającego się z L bloków na dwa mniejsze pudełka A_1, A_2 , które pokrywa niezależnie za pomocą odpowiednio L_1 i L_2 bloków.

W pierwszym kroku wypełnia pudełko A_1 na ostatniej dostępnej współrzędnej oraz przechodzi do kolejnej iteracji. Dla przykładu, weźmy pudełko trójwymiarowe i założmy, że ostatnią współrzędną jest wysokość. Działanie procedury

można sobie wyobrazić jako ustalenie orientacji tych L_1 bloków tak, aby ich wysokość całkowicie wypełniała wysokość pudełka A_1 ; do ustalenia pozostały dalej dwa wymiary pudełka (szerokość oraz długość), które zostaną określone w kolejnych iteracjach.

W drugim kroku natomiast dokonuje samego obrotu pudełka A_2 , które dalej poddaje kolejnym iteracjom. Dzięki tej operacji tiling zawdzięcza swój spiralny wygląd. Zauważmy również, że podział pudełka A dokonywany jest właśnie tak, aby w kroku pierwszym pudełko A_1 mogło zostać wypełnione na ostatniej współrzędnej. Taką możliwość zawdzięcza szczególnej postaci ciągów z rodziny \mathcal{T}_λ , które spełniają warunek (3.3).

Przykład działania algorytmu dla pudełka 7×8 oraz bloków 1×2 oraz wynik (tiling) został przedstawiony na rysunku 3.11.



Rysunek 3.11: Rekurencyjna produkcja tilingu.

3.4 Uogólnione współczynniki dwumienne

Do tej pory nie zajmowaliśmy się liczbą bloków, które tworzą tiling konkretnego pudełka. W tym rozdziale pokażemy, że dla uogólnionego problemu tilingu liczba ta jest związana z interpretacją kombinatoryczną pewnej klasy współczynników. Główne wyniki tego rozdziału pochodzą z prac A. K. Kwaśniewskiego [10, 11], które przytoczymy w terminologii wielowymiarowych pudełek.

Definicja 3.8. Niech F będzie dowolnym ciągiem oraz $n, k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \leq n$. Współczynnikiem F -nomialnym nazywamy symbol

$$\binom{n}{k}_F = \frac{n_F!}{k_F!(n-k)_F!} = \frac{n_F^m}{k_F!},$$

gdzie $m = n - k + 1$.

Łatwo pokazać, że nie dla każdego dowolnego ciągu F wartość współczynnika będzie liczbą całkowitą. Przykładowo dla $A = (0, 1, 3, 5, 7, \dots)$ mamy $\binom{4}{2}_A = 5 \cdot 7/3 \notin \mathbb{N}$. Kwaśniewski wprowadził tak zwaną *rodzinę ciągów dopuszczalnych* (ang. *admissible*), dla których wartość współczynnika jest zawsze liczbą naturalną bądź zero. Charakteryzacja tej rodziny została zaprezentowana w pracy [4]. Umożliwiło to stworzenie szerokiej klasy zredukowanych algebr incydencji $R(P, \sim)$, których F -nomiale są elementami posiadającymi interpretację kombinatoryczną. Po więcej na temat cobweb posetów odsyłamy czytelnika do materiałów źródłowych [10, 11] oraz rozprawy E. Krot-Sieniawskiej [8, Roz. 5].

Twierdzenie 3.2. [Kwaśniewski, 2005] *Weźmy dowolne m -wymiarowe F -pudełko $V_{k,n}$, gdzie $m = n - k + 1$, oraz rodzinę parami rozłącznych bloków B_1, B_2, \dots, B_L , takich że $|B_i| = |V_m|$ dla $i = 1, 2, \dots, L$. Wówczas zachodzi*

$$V_{k,n} = \bigcup_{i=1}^L B_i \quad \Leftrightarrow \quad L = \binom{n}{m}_F. \quad (3.4)$$

Dowód. Podamy zarys dowodu pochodzącego z [11]. Zauważmy, że objętość kostki $V_{k,n}$ wynosi $|V_{k,n}| = k_F(k+1) \cdots n_F = n_F^m$, gdzie $m = n - k + 1$. Natomiast objętość bloków B_i z założenia twierdzenia wynosi $|B_i| = |V_m| = 1_F \cdots m_F = m_F!$ dla $i = 1, 2, \dots, L$. Zatem ilość bloków składających się na tiling jest równa

$$\frac{|V_{k,n}|}{|V_m|} = \frac{n_F^m}{m_F!} = \binom{n}{m}_F.$$

■

Problem interpretacji kombinatorycznej uogólnionych współczynników dwumiennych zawsze łączył się z nadaniem interpretacji dla współczynników Fibonomialnych, czyli w przypadku, gdy ciągiem F są liczby Fibonacciego [9].

Wniosek 3.2. *Niech \mathcal{F} będzie ciągiem liczb Fibonacciego. Weźmy dowolne m -wymiarowe \mathcal{F} -pudełko $V_{k,n}$. Wartość $\binom{n}{m}_{\mathcal{F}}$ jest równa liczbie bloków postaci σP_m , którymi można pokryć to pudełko.*

Niech F będzie ciągiem z rodziny \mathcal{T}_λ . Dzięki konstrukcji tilingu z twierdzenia 3.1 otrzymujemy rekurencję na liczbę bloków tworzących pokrycie, czyli na wartość współczynników F -nomialnych.

Wniosek 3.3. Niech $F \in \mathcal{T}_\lambda$. Liczba bloków, na które składa się tiling m -wymiarowego pudełka $V_{k+1,n}$, gdzie $m = n - k$, spełnia poniższą relację

$$\binom{n}{m}_F = \rho(k, m) \binom{n-1}{m-1}_F + \lambda(k, m) \binom{n-1}{m}_F, \quad (3.5)$$

z warunkami początkowymi $\binom{n}{n}_F = \binom{n}{0}_F = 1$.

Dowód. Weźmy F -pudełko $V_{k+1,n}$, gdzie $F \in \mathcal{T}_\lambda$. Z twierdzenia 3.2 mamy, że liczba bloków składających się na tiling tego pudełka wynosi $\binom{n}{m}_F$. W dowodzie twierdzenia 3.1 pudełko wyjściowe podzieliliśmy na dwie rozłączne klasy pudełek A oraz B . W pierwszej rodzinie mieliśmy ρ warstw izomorficznych z $\langle \Phi_{k+1} \rightarrow \Phi_{n-1} \rangle$, a zatem liczba bloków w A wynosi $\rho \cdot \binom{n-1}{m-1}_F$. W drugiej klasie dzięki permutacji poziomów otrzymaliśmy podział λ warstw $\langle \Phi_k \rightarrow \Phi_{n-1} \rangle$, czyli liczba bloków w tym przypadku równa jest $\lambda \cdot \binom{n-1}{m}_F$. Korzystając z rozłączności rodzin A oraz B otrzymujemy rekurencję (3.5), co należało pokazać. ■

Pudełkowa interpretacja współczynników dwumiennych

Na zakończenie tego rozdziału wyprowadzimy prosty wniosek z teorii uogólnionych współczynników dwumiennych. Weźmy rodzinę wszystkich k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego. Moc takiej rodziny oznacza się tak zwanym symbolem Newtona $\binom{n}{k}$, a formalnie współczynnikiem dwumiennym od dwumianu $(x+1)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$. Jest on szczególnym przypadkiem współczynników N -nomialnych, gdzie N jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych $N = (0, 1, 2, \dots)$, to znaczy

$$\frac{n^k}{k!} = \binom{n}{k} \equiv \binom{n}{k}_N = \frac{n^k_N}{k_N!}.$$

Z wniosku 3.3 mamy, że te liczby spełniają również relację

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n}{k}_N = \binom{n-1}{k-1}_N + \binom{n-1}{k}_N,$$

dla której mamy interpretację wyrażoną w terminologii podzbiorów (klasyczna interpretacja symbolu Newtona) oraz za pomocą liczby bloków tworzących specyficzne tilingi wielowymiarowych pudełek.

Wniosek 3.4. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ i niech $m := n - k + 1$. Wówczas $\binom{n}{m}$ jest liczbą bloków o wymiarach $1 \times 2 \times \dots \times m$, które składają się na tiling pudełka $k \times (k+1) \times \dots \times n$.

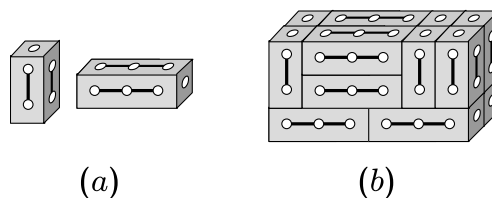
Rozdział 4

Pokrycie dwoma rodzajami pudełek

4.1 Definicja wariantu

Do tej pory zajmowaliśmy się pokryciami wielowymiarowych pudełek z wykorzystaniem jednego rodzaju bloków, które mogliśmy dowolnie obracać i przesuwać w przestrzeni. Bower i Michael [1] zaproponowali zmodyfikowany wariant klasycznego pokrycia, dla którego podali dwie równoważne charakteryzacje pudełek posiadających tiling: geometryczną oraz arytmetyczną. Druga z nich jest uogólnieniem przypadku pokrycia pudełek o dyskretnych wymiarach na dowolne liczby rzeczywiste.

Definicja 4.1. Niech dane będzie d -wymiarowe pudełko \mathcal{R} oraz dwa rodzaje bloków $\mathcal{A} = a_1 \times \dots \times a_d$, $\mathcal{B} = b_1 \times \dots \times b_d$. Tilingiem pudełka \mathcal{R} będziemy nazywać zbiór rozłącznych bloków postaci \mathcal{A}, \mathcal{B} , które możemy przesuwać bez zmiany orientacji w przestrzeni oraz których suma daje całe pudełko \mathcal{R} .



Rysunek 4.1: Przykład tilingu (b) dwoma rodzajami pudełek (a) bez możliwości obrotów bloków.

Nie jest powiedziane, że do pokrycia pudełka musimy użyć dwóch rodzajów bloków, w szczególnych przypadkach pokrycie będzie składało się tylko z jednego rodzaju bloków. Niech $d = 2$; zauważmy że gdy blokami są $a_1 \times a_2$ oraz $a_2 \times a_1$, problem tilingu w obecnym rozumieniu sprowadza się do dwuwymiarowego problemu tilingu klasycznego, przy czym obecne dwa rodzaje bloków będą jedynie dwoma orientacjami tego samego bloku.

Powyzsza definicja tilingu będzie obowiązywała już do końca tego rozdziału. Natomiast pojęcia bloków *wielokrotnych* oraz pokrycia *dwudzielnego* pozostają bez zmian z tymi wprowadzonymi w rozdziale 1.

4.2 Charakteryzacja tilingu Bowera i Micheala

Zanim przejdziemy do przypadku pokrycia dwoma rodzajami pudełek, przywołajmy proste spostrzeżenie, które pokazuje, że wersja z jednym rodzajem pudełek w obecnym rozumieniu tilingu (bez możliwości obrotu pudełek) jest zagadnieniem trywialnym.

Obserwacja 4.1. *Pudełko d -wymiarowe \mathcal{R} może być pokryte jednym rodzajem bloków \mathcal{B} wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{R} jest wielokrotnością \mathcal{B} . Co więcej, istnieje tylko jeden taki tiling.*

W klasycznym problemie tilingu wielowymiarowych pudełek istnienie parkietu dwudzielnego nie pociągało za sobą istnienia niedwudzielnego i odwrotnie. Bower i Michael wykazali, że dla obecnej definicji podziału istnienie tilingu dwudzielnego jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie dowolnego tilingu, również niedwudzielnego. Zanim podamy główny wynik pracy [1], przedstawimy kilka lematów i obserwacji ukazujących własności tilingu Bowera i Micheala.

Lemat 4.1. *Niech z, v oraz w będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Poniższe stwierdzenia (a)-(c) są równoważne.*

- (a) *Odcinek o długości z może być pokryty odcinkami o długościach v oraz w .*
- (b) *Odcinek o długości z posiada dwudzielny tiling odcinkami o długościach v oraz w .*
- (c) *Istnieją nieujemne liczby α, β , takie że $z = \alpha v + \beta w$.*

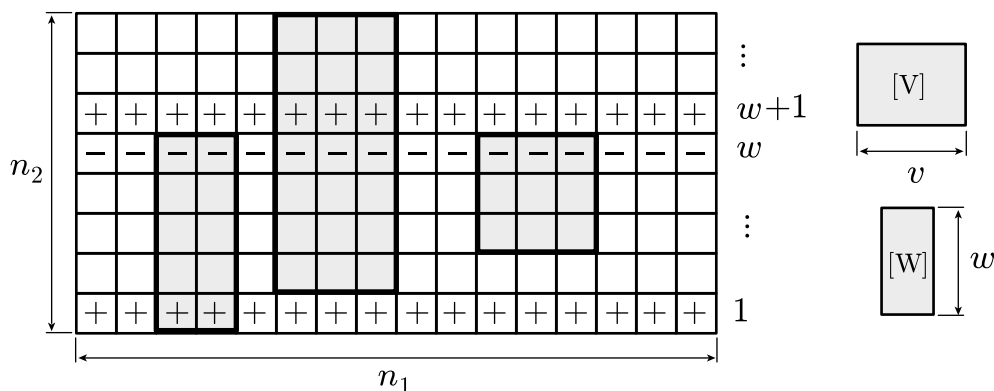
Dowód. Jeżeli odcinek o długości z może być pokryty odcinkami v i w to również zachodzi $z = \alpha v + \beta w$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Jeśli ułożymy najpierw odcinki długości v , a następnie te o długości w , to miejsce pomiędzy ostatnim odcinkiem długości v a pierwszym odcinkiem długości w definiuje podział dwudzielny tilingu. A zatem (a) implikuje (b) i (c). Łatwo pokazać również konstrukcję tilingu (a), gdy zachodzi (c). ■

Lemat 4.2 (o podzielności). *Niech v oraz w będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że dwuwymiarowe pudełko \mathcal{R} posiada tiling blokami, których szerokość jest podzielna przez v lub wysokość przez w (dla każdego z bloków z osobna). Wtedy pudełko \mathcal{R} ma szerokość podzielną przez v lub wysokość przez w .*

Dowód lematu 4.2 korzysta z tzw. argumentu “charge-counting”, który wielokrotnie pojawiał się w literaturze poświęconej problemowi tilingu [15].

Dowód. Oznaczmy przez $[V]$ prostokąty, których szerokość podzielna jest przez v , oraz przez $[W]$ te prostokąty, których wysokość podzielna jest przez w . Załóżmy, że $\mathcal{R} = n_1 \times n_2$ ma pokrycie prostokątami typu $[V]$ i $[W]$.

Skonstruujmy kratę $n_1 \times n_2$ oraz przypiszmy każdej komórce wagę ze zbioru $\{-1, 0, +1\}$. Następnie ponumerujmy wiersze kolejno $1, 2, \dots, n_2$ od dołu do góry. Komórkom w wierszach $j \in \{1, w+1, 2w+1, \dots\}$ przypiszmy wagę $+1$. Dla wierszy $k \in \{w, 2w, \dots\}$ wagę ujemną -1 , a dla pozostałych pól wagę 0 (patrz rysunek 4.2).



Rysunek 4.2: Argument “charge-counting” dla przypadku $v = 3$ i $w = 5$.

Zauważmy, że wartość Ω sumy wag całego pudełka równa się n_1 , jeżeli w nie dzieli n_2 oraz zero, gdy $w|n_2$. Jeżeli $w|n_2$, to kończymy dowód; załóżmy zatem,

że $\Omega = n_1$. Rozważmy sumy wag ograniczone obszarem przez poszczególne bloki tworzące pokrycie.

Dla bloków typu $[W]$ suma wag będzie zawsze równa zero, ponieważ bloki te zawierają wielokrotność w wierszy, które z kolei zawierają taką samą liczbę wierszy z wagami dodatnimi co ujemnymi.

Natomiast dla bloków typu $[V]$ wartość sumy wag komórek, które zawierają, jest podzielna przez v . Mając całkowitą liczbę bloków oraz założenie, że pudełko ma tiling (zostały wykorzystane wszystkie komórki), waga całego pudełka Ω równa n_1 musi się dzielić przez v bez reszty, to znaczy $v|n_1$, co kończy dowód. ■

Obserwacja 4.2. *Załóżmy, że pudełko $z_1 \times \dots \times z_d$ posiada tiling blokami $v_1 \times \dots \times v_d$ oraz $w_1 \times \dots \times w_d$. Wtedy istnieją nieujemne liczby całkowite α_i oraz β_i takie, że $z_i = \alpha_i v_i + \beta_i w_i$ dla $i = 1, 2, \dots, d$.*

Jest to bardzo proste spostrzeżenie mówiące jedynie tyle, iż i -ty wymiar z_i pudełka musi być kombinacją liniową odpowiednich wymiarów pudełek pierwszego rodzaju v_i oraz drugiego w_i . Współczynniki α_i, β_i są odpowiednio liczbą bloków pierwszego i drugiego rodzaju, dla $i = 1, 2, \dots, d$.

Poniższe twierdzenie będzie przypadkiem dwuwymiarowym głównego twierdzenia Bowera i Micheala o charakteryzacji pudełek posiadających tiling. Oznaczmy przez $\langle v, w \rangle$ zbiór nieujemnych kombinacji liniowych v, w :

$$\langle v, w \rangle = \{ \alpha v + \beta w : \alpha = 0, 1, 2, \dots; \beta = 0, 1, 2, \dots \}.$$

Twierdzenie 4.1 (Wersja \mathbb{Z}^2). *Niech v_1, v_2, w_1, w_2 będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $\text{nwd}(v_1, w_1) = \text{nwd}(v_2, w_2) = 1$. Wtedy prostokąt o wymiarach $n_1 \times n_2$ może być pokryty przez prostokąty $v_1 \times v_2$ oraz $w_1 \times w_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

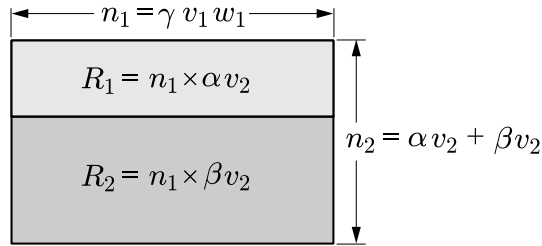
- (a) v_1 dzieli n_1 oraz v_2 dzieli n_2 ; lub
- (b) w_1 dzieli n_1 oraz w_2 dzieli n_2 ; lub
- (c) $v_1 w_1$ dzieli n_1 oraz $n_2 \in \langle v_2, w_2 \rangle$; lub
- (d) $v_2 w_2$ dzieli n_2 oraz $n_1 \in \langle v_1, w_1 \rangle$.

Dowód. Najpierw pokażemy dowód w prawą stronę. Weźmy zatem bloki $\mathcal{B}_1 = v_1 \times v_2$, $\mathcal{B}_2 = w_1 \times w_2$ oraz pudełko $\mathcal{R} = n_1 \times n_2$, które posiada pokrycie tymi

blokami. Z obserwacji 4.2 wiemy, że $n_1 \in \langle v_1, w_1 \rangle$ oraz $n_2 \in \langle v_2, w_2 \rangle$. Blok \mathcal{B}_1 ma szerokość v_1 , natomiast blok \mathcal{B}_2 wysokość w_2 . Korzystając z lematu 4.2 o podzielności mamy, że $v_1|n_1$ lub $w_2|n_2$. Analogicznie dla przypadku, gdy weźmiemy szerokość w_1 bloku \mathcal{B}_2 oraz wysokość v_2 bloku \mathcal{B}_1 , otrzymamy, że $w_1|n_1$ lub $v_2|n_2$. Porządkując wszystkie te wnioski otrzymujemy warunki (a)-(d), tzn.

$$n_1 \in \langle v_1, w_1 \rangle \wedge n_2 \in \langle v_2, w_2 \rangle \wedge (v_1|n_1 \vee w_2|n_2) \wedge (w_1|n_1 \vee v_2|n_2).$$

Dowód w drugą stronę polega na pokazaniu, że każdy z warunków (a)-(d) prowadzi do pewnego tilingu. Punkty (a) oraz (b) konstruują pokrycie pudełka \mathcal{R} tylko jednym rodzajem bloku, odpowiednio \mathcal{B}_1 bądź \mathcal{B}_2 . Pozostałe dwa warunki (c) i (d) prowadzą do tilingu dwudzielnego, w którym podział pudełka na dwa \mathcal{R}_1 oraz \mathcal{R}_2 występuje odpowiednio na wymiarze n_2 i n_1 (patrz rysunek 4.3). ■



Rysunek 4.3: Przykład konstrukcji tilingu dwudzielnego.

Mając na uwadze powyższe rozważania przejdziemy teraz do sformułowania i udowodnienia pełnej charakteryzacji pudełek posiadających tiling.

Twierdzenie 4.2. [Bower i Michael, 2004] *Niech dane będzie pudełko $\mathcal{R} = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_d$ oraz bloki $\mathcal{A} = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_d$, $\mathcal{B} = b_1 \times b_2 \times \dots \times b_d$. Pudełko \mathcal{R} posiada tiling blokami \mathcal{A}, \mathcal{B} wtedy i tylko wtedy, gdy*

- (a) $a_i|r_i$ dla $i = 1, 2, \dots, d$; lub
- (b) $b_i|r_i$ dla $i = 1, 2, \dots, d$; lub
- (c) istnieje taki indeks k , że $r_k \in \langle a_k, b_k \rangle$, natomiast $a_i|r_i$ oraz $b_i|r_i$ dla wszystkich $i \neq k$.

Dowód. Twierdzenie zostało udowodnione już dla przypadku jednowymiarowego (lemat 4.1) oraz dwuwymiarowego (twierdzenie 4.1). Niech $d \geq 3$. Weźmy pudełko \mathcal{R} oraz bloki \mathcal{A}, \mathcal{B} o wymiarach z założeń twierdzenia.

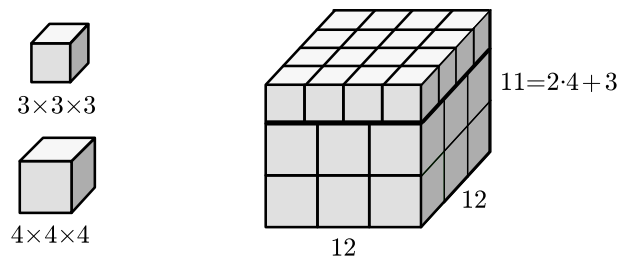
Dla warunków (a) oraz (b) mamy trywialne pokrycia wielokrotne. Aby pokazać warunek (c), przypuśćmy, że dwa poprzednie nie są spełnione. Czyli muszą istnieć indeksy j, k takie, (\star) że wartości r_j/a_j oraz r_k/b_k nie są liczbami całkowitymi. Pokażemy, że $j = k$ przez sprowadzenie do sprzeczności.

Niech $j \neq k$. Rozważmy pokrycie dwuwymiarowego przekroju pudełka \mathcal{R} , tj. prostokąta $r_j \times r_k$ blokami $a_j \times a_k$ oraz $b_j \times b_k$. Z twierdzenia 4.1 dla wersji \mathbb{Z}^2 mamy, że aby istniał tiling takiego prostokąta, musiałyby być spełnione warunki $a_j|r_j$ lub $b_k|r_k$, co jest sprzeczne z (\star) . A zatem nie może istnieć taki tiling, którego istnienie założyliśmy już na początku dowodu — sprzeczność. Ostatecznie $j = k$.

Z kolei na mocy obserwacji 4.2 mamy, że $r_k \in \langle a_k, b_k \rangle$, czyli otrzymujemy warunek (c), co kończy dowód w prawą stronę.

W drugą stronę pokazujemy, że warunki (a)-(c) prowadzą do pewnego tilingu, analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.1. ■

Przykład 4.1. Weźmy pudełko $12 \times 12 \times 11$ oraz bloki $4 \times 4 \times 4$ i $3 \times 3 \times 3$. Warunek (c) twierdzenia 4.2 jest spełniony z wartością indeksu $k = 3$, to znaczy $11 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3$. Dla pozostałych wymiarów zachodzi $4|12$ oraz $3|12$ a zatem pudełko posiada tiling (patrz rysunek 4.4).



Rysunek 4.4: Tilingu z przykładu 4.1.

Zakończenie

Niniejsza praca miała na celu przedstawienie wyników dotyczących problemu istnienia tilingu dla wielowymiarowych pudełek o wymiarach dyskretnych. Zostały zawarte w niej klasyczne badania de Bruijna z roku 1969, które dają nam warunki konieczne na istnienie tilingu oraz pokrywć wykorzystujących specyficzne bloki harmoniczne.

Podane zostały również nowe wyniki uzyskane na przestrzeni kilku ostatnich lat dotyczące uogólnionego wariantu tilingu wielowymiarowych pudełek. Okazało się bowiem, że problem tilingu w przyjętej definicji ma związek z kombinatoryczną interpretacją pewnej rodziny uogólnionych współczynników Fibonomialnych, co stanowi dodatkową motywację do badań nad tymi problemami.

Natomiast w ostatniej części pracy przedstawiony został zmodyfikowany model podstawowego problemu tilingu. Zakłada on możliwość użycia dwóch rodzajów bloków, które możemy jedynie przesuwać w przestrzeni, bez dokonywania obrotów. Dla takiej definicji tilingu podana została pełna charakteryzacja pudełek, które posiadają pokrycie.

Pomimo elementarnej definicji problemu, dla którego pierwsze wyniki pochodzą już sprzed kilku dekad, okazuje się, że ma on związek z innymi bardziej zaawansowanymi zagadnieniami analizy kombinatorycznej. Dzięki temu problem tilingu wielowymiarowych pudełek staje się atrakcyjnym obiektem badań, szczególnie, że wiele z pytań, których dotyczy, pozostaje nadal otwartych.

Bibliografia

- [1] R. J. Bower, T. S. Michael. When can you tile a box with translates of two given rectangular bricks? *The Electronic Journal of Combinatorics*, 11(N7):1–9, 2004. [cytowanie na str. 2, 27, 28]
- [2] E. Remila D. Beauquier, M. Nivat, M. Robson. Tiling figures of the plane with two bars. *Journal of Computational Geometry*, 5:1–25, 1995. [cytowanie na str. 9]
- [3] N. G. de Bruijn. Filling boxes with bricks. *The American Mathematical Monthly*, 76:37–40, 1969. [cytowanie na str. 2, 11, 14]
- [4] M. Dziemiańczuk. On cobweb admissible sequences - the production theorem. In *Proceedings of The 2008 International Conference on Foundations of Computer Science (FCS'08)*, 163–165. Worldcomp '08, CSREA Press, 2008. [cytowanie na str. 25]
- [5] M. Dziemiańczuk. On cobweb posets tiling problem. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 16(2):219–233, 2008. [cytowanie na str. 15]
- [6] M. Dziemiańczuk. Combinatorial interpretation of fibonomial coefficients in terms of cobweb tiling. Przedłożone do publikacji, październik 2009. [cytowanie na str. 21]
- [7] D. E. Knuth. Two notes on notation. *American Mathematical Monthly*, 99(5):403–422, 1992. [cytowanie na str. 4]
- [8] E. Krot-Sieniawska. Rozszerzenie rachunku operatorowego mullina-rotty i pokrewne zastosowania analizy kombinatorycznej. Rozprawa doktorska. Politechnika Łódzka 2008. [cytowanie na str. 25]

- [9] A. K. Kwaśniewski. Comments on combinatorial interpretation of fibonomial coefficients - an e-mail style letter. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 42:10–11, 2004. [cytowanie na str. 25]
- [10] A. K. Kwaśniewski. Cobweb posets as noncommutative prefabs. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 14(1):37–47, 2007. [cytowanie na str. 4, 15, 24, 25]
- [11] A. K. Kwaśniewski. On cobweb posets and their combinatorially admissible sequences. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 18(1):17–32, 2009. [cytowanie na str. 2, 4, 15, 16, 19, 24, 25]
- [12] A. K. Kwaśniewski, M. Dziemiańczuk. On cobweb posets most relevant codings. Przedłożone do publikacji, 2009. [cytowanie na str. 4, 15, 20]
- [13] W. Lipski, W. Marek. Analiza Kombinatoryczna, tom 59. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986. [cytowanie na str. 3]
- [14] K. A. Ross, C. R. B. Wright. Matematyka Dyskretna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1996. [cytowanie na str. 3]
- [15] S. Wagon. Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle. *American Mathematical Monthly*, 94:601–617, 1987. [cytowanie na str. 29]