Argument wielomianowy w Kombinatoryce

Przygotował: M. Dziemiańczuk

18 stycznia 2011

Streszczenie

Pokażemy metodę, która pozwala uogólniać zbiory argumentów dla tożsamości opisanych wielomianami.

1 Wstęp

Oznaczmy przez $\deg(p(x))$ stopień wielomianu $p(x)$ oraz przypomnijmy Fundamentalne Twierdzenie Algebry (FTA):

> Wielomian stopnia d ma dokładnie d pierwiastków (zespolonych) oraz co najwyżej d parami różnych pierwiastków.

Twierdzenie 1. *Niech $p(x), q(x)$ będą wielomianami stopnia co najwyżej d, takim że dla pewnych $d+1$ parami różnych argumentów $\{x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}\}$ zachodzi $p(x_i) = q(x_i)$. Wtedy $p(x) \equiv q(x)$.*

Dowód. Udowodnimy przez sprowadzenie do sprzeczności. Załóżmy więc, że $p(x) \not\equiv q(x)$ oraz zdefiniujmy $r(x) = p(x) - q(x)$.

Mamy więc, że $r(x) \not\equiv 0$ oraz, że $\deg(r(x)) \leqslant d$. Natomiast z założeń twierdzenia mamy, że dla pewnych $\{x_1, \ldots, x_{d+1}\}$ zachodzi $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) \equiv 0$, zatem wielomian $r(x)$ posiada $d+1$ pierwiastków. Oczywiście jest to w sprzeczności z FTA. Zatem $r(x) \equiv 0$ z czego wynika, że $p(x) \equiv q(x)$ co należało pokazać.

□

2 Argument wielomianowy

Następne dwa przykłady ilustrują, jak można wykorzystać wnioski z Twierdzenia 1 nazywane Argumentem Wielomianowym.

Przykład 1. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}, \tag{1}$$

gdzie $\binom{x}{0} = 1$.

Dowód. Dla $n, k \in \mathbb{N}$ możemy podać prosty dowód kombinatoryczny. Teraz zauważmy, że

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

jest wielomianem stopnia k nad zmienną x. Spójrzmy więc na (1) jak na równość wielomianów stopnia k nad zmienną x, które są równe dla nieskończenie wielu x (wystarczy, że dla co najmniej $k+1$ różnych x).

Zatem z Twierdzenia 1 mamy, że powyższa rekurencja jest prawdziwa dla wszystkich x będących liczbami zespolonymi. □

Przykład 2. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$(x-k)\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k}. \tag{2}$$

Dowód. Rozważmy lewą stronę równania (2) a następnie skorzystajmy z zasady symetrii oraz pochłaniania dla współczynników dwumiennych aby otrzymać

$$\begin{aligned} (x-k)\binom{x}{k} &= (x-k)\binom{x}{x-k} && (3)\\ &= x\binom{x-1}{x-k-1} && (4)\\ &= x\binom{x-1}{k}. && (5) \end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie jest prawdziwe tylko dla x, k będących liczbami naturalnymi. Łatwo sprawdzić, że zasada symetrii

$$\binom{x}{k} = \binom{x}{x-k}$$

nie jest spełniona dla $x \in \mathbb{C}$ a korzystaliśmy z niej w (3) oraz (5), dlatego dowód w tym sensie jest niepoprawny.

Zauważmy jednak, że na początku i na końcu rozumowania otrzymujemy wielomiany stopnia $(k+1)$ nad zmienną x, które są równe dla wszystkich liczb naturalnych, więc korzystając z Argumentu Wielomianowego dowodzimy, że (2) jest prawdziwy również dla $x \in \mathbb{C}$. □

Literatura

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN.

[2] A. K. Kwaśniewski, *Wstęp do algebry współczesnej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 1991.