# Logarithmic differentiation - pochodna logarytmiczna

Przygotował: M. Dziemiańczuk

3 czerwca 2014

**Streszczenie**

Załóżmy, że mamy funkcję tworzącą $A(x)$ dla pewnego ciągu liczbowego $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Przedstawimy metodę, która zastosowana do $A(x)$ pozwala otrzymać równanie rekurencyjne, które spełniają wyrazy ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

## 1 Problem

Niech dana będzie zwarta postać funkcji tworzącej $A(x)$ dla ciągu liczbowego $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Chcemy znaleźć równanie rekurencyjne, które spełniają wyrazy ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

## 2 Metoda pochodnej logarytmicznej

Niech dane będzie równanie

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = A(x), \tag{1}$$

gdzie $A(x)$ jest znane. Metoda pochodnej logarytmicznej składa się z następujących kroków.

(a) Zlogarytmuj obie strony równania (1).

(b) Zróżniczkuj obie strony równania (1) oraz pomnóż przez $x$.

(c) Uprość równanie z ułamków.

(d) Dla każdego $n$, porównaj współczynniki przy $x^n$ po obu stronach otrzymanego równania.

## 3 Przykład 1

Niech dana będzie funkcja tworząca dla ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, tzn.

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} \tag{2}$$

Znajdziemy równanie rekurencyjne, które spełniają wyrazy ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

(a) Logarytmujemy obie strony otrzymując

$$\log\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) = -\log(1-2x) - \log(1-3x).$$

(b) Różniczkujmy obie strony oraz mnożymy przez $x$

$$\frac{\sum_{n\geqslant 0} n\, a_n x^n}{\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n} = \frac{2x}{(1-2x)} + \frac{3x}{(1-3x)}.$$

(c) Upraszczamy

$$\sum_{n\geqslant 0} n\, a_n x^n = \left(\frac{2x}{(1-2x)} + \frac{3x}{(1-3x)}\right) \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

(d) Porównujemy współczynniki przy $x^n$

$$\sum_{n\geqslant 0} n\, a_n x^n = \sum_{n\geqslant 1} (2^n + 3^n) x^n \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

$$\sum_{n\geqslant 0} n\, a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k=1}^{n} (2^k + 3^k) a_{n-k} x^n.$$

Otrzymujemy, dla $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (2^k + 3^k) a_{n-k}$$

oraz $a_0 = 1$.

Podajmy kilka pierwszych wyrazów ciągu $(a_n)$,

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 5, 19, 65, 211, 665, 2059, 6305, 19171, 58025, 175099, \ldots).$$

# 4 Przykład 2

Niech $B_n$ oznacza liczbę nieporządków zbioru $n$-elementowego. Liczby $B_n$ nazywane są liczbami Bella. Wiadomo, że funkcja tworząca liczb Bella jest postaci (wzór Dobinskiego)

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}. \tag{3}$$

(a) Logarytmujemy obie strony otrzymując

$$\log\left(\sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!}\right) = e^x - 1.$$

(b) Różniczkujmy obie strony oraz mnożymy przez $x$

$$\frac{\sum_{n\geqslant 0} B_n n\, x^n/n!}{\sum_{n\geqslant 0} B_n x^n/n!} = xe^x.$$

(c) Upraszczamy

$$\sum_{n\geqslant 0} nB_n \frac{x^n}{n!} = (xe^x) \sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

$$\sum_{n\geqslant 0} nB_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} n\frac{x^n}{n!} \sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

(d) Porównujemy współczynniki przy $x^n/n!$, dla $n \geqslant 1$, po obu stronach

$$\sum_{n\geqslant 1} nB_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kB_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Proste uproszczenia dadzą nam równanie rekurencyjne

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k, \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Podajmy kilka pierwszych liczb Bella,

$$(B_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \ldots).$$

## 5 Uwagi

Więcej przykładów zastosowania metody znajdziemy w [1, Rozdz. 1].

## Literatura

[1] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1994.