Zliczanie Podziałów Liczb

Przygotował: M. Dziemiańczuk

7 lutego 2011

Streszczenie

1 Wprowadzenie

Przez podział λ nieujemnej liczby całkowitej n rozumiemy nierosnący ciąg $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ dodatnich liczb całkowitych λ_i, które nazywamy składnikami (blokami). Przez $p(n)$ oznaczamy liczbę wszystkich podziałów liczby n.

Przykład 1. Dla przykładu, $p(4) = 5$, ponieważ:

$$\begin{aligned} 4 &= (4) \\ &= (3+1) \\ &= (2+2) \\ &= (2+1+1) \\ &= (1+1+1+1). \end{aligned}$$

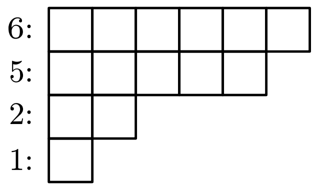
Przyjmujemy $p(n) = 0$ dla $n < 0$ oraz $p(0) = 1$.

Inną reprezentacją podziału λ liczby n jest zapis $(1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3}, \ldots)$, gdzie a_i oznacza liczbę składników i podziału λ. Przy tej reprezentacji zachodzi:

$$n = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot a_k. \tag{1}$$

Kolejną, tym razem geometryczną reprezentacją jest przedstawienie podziału liczb za pomocą diagramów Ferrersa. Zamiast wprowadzania formalnej definicji, użyjemy przykładu.

Przykład 2. Rozważmy podział $\lambda = (6, 5, 2, 1)$ liczby 14. Diagram Ferrersa dla podziału λ przedstawiony jest na Rysunku 1. Jest nim zbiór komórek ułożonych wierszami od góry do dołu, których ilość jest równa rozmiarowi danego bloku λ_i.



Rysunek 1: Diagram Ferrersa dla podziału $(6, 5, 2, 1)$ liczby 14.

Z podziałem λ liczby n wiążemy tzw. podział sprzężony λ^* do λ, który najłatwiej przedstawić jest na diagramie Ferrersa.

Przykład 3. Podziałem sprzężonym do liczby 14 z Przykładu 2 jest $\lambda^* = (4, 3, 2, 2, 2, 1)$.

Diagramy Ferrersa oraz pojęcie podziałów dualnych mogą posłużyć do udowodnienia następujących twierdzeń.

Twierdzenie 1. *Ilość podziałów liczby n, których największym składnikiem jest k, równa jest ilości podziałów liczby n na dokładnie k składników.*

Twierdzenie 2. *Niech $p_e(\mathcal{D}; n)$ (odpowiednio $p_o(\mathcal{D}; n)$) oznacza ilość podziałów liczby n na parzystą liczbę składników (odpowiednio nieparzystą). Wtedy*

$$p_e(\mathcal{D}; n) - p_o(\mathcal{D}; n) = \begin{cases} (-1)^m & if\ n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1), \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{2}$$

Dowód. Dowód wykorzystuje graficzną reprezentację podziałów liczby i polega na zdefiniowaniu bijekcji między odpowiednimi klasami podziałów. Zaznaczymy jedynie, że przypadek $n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1)$ to tzw. pentagonalne liczby (pełny dowód zamieszczony jest np. w [2]). □

2 Funkcje tworzące

Twierdzenie 3 (Euler)**.**

$$\prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 - x^n} = \sum_{n \geqslant 0} p(n) x^n. \tag{3}$$

Dowód. Rozważmy lewą stronę (3), którą oznaczmy przez $P(x)$,

$$\begin{aligned} P(x) = & (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ & \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ & \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \\ & \cdots \end{aligned}$$

Weźmy teraz jednomian x^n, który po wymnożeniu nawiasów można zapisać jako
$$x^n = x^{1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + 3\cdot a_3 + \cdots},$$
przy czym a_i oznacza ilość składników i w podziale liczby n. Każdy taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ wyznacza dokładnie jeden podział $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots)$, a zatem współczynnik przy x^n będzie liczbą wszystkich podziałów liczby n. □

Przez $p(H; n)$ oznaczmy ilość podziałów liczby n, których składnikami są elementy ze zbioru $H \subset \mathbb{N}$. Przy tej notacji mamy $p(n) = p(\mathbb{N}; n)$. Z poprzedniego twierdzenia możemy łatwo wyprowadzić funkcję tworzącą dla liczb $p(H; n)$:

$$\prod_{n \in H} \frac{1}{1 - x^n} = \sum_{n \geqslant 0} p(H; n) x^n, \tag{4}$$

a następnie udowodnić kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Ilość podziałów liczby n, które nie zawierają składnika równego 1 jest równa $p(n) - p(n-1)$.*

Dowód. Oznaczmy przez $f(n)$ liczbę podziałów, które nie zawierają składnika 1. Mamy wtedy

$$\sum_{n \geqslant 0} f(n) x^n = (1 - x) P(x).$$

□

Oprócz algebraicznego dowodu możemy również udowodnić pokazując odpowiednią bijekcję pomiędzy odpowiednimi rodzinami podziałów.

Obserwacja 1. *Oznaczmy przez $p(H \leqslant d; n)$ liczbę podziałów, których składniki należą do zbioru H oraz występują co najwyżej d razy. Wtedy mamy*

$$\sum_{n \geqslant 0} p(H \leqslant d; n) x^n = \prod_{n \in H} (1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{dn}) \tag{5}$$

$$= \prod_{n \in H} \frac{1 - x^{(d+1)n}}{1 - x^n}. \tag{6}$$

Obserwacja 2. *Mamy*

$$\prod_{j \geqslant 0} (1 + x^{2^j}) = \frac{1}{1 - x}. \tag{7}$$

Dowód. Wskazówka: zauważmy, że każda liczba całkowita ma jednoznaczny zapis w postaci sumy potęg liczby 2. □

Oznaczmy przez $p(\mathcal{D};n)$ moc rodziny wszystkich podziałów liczby n, których składniki się nie powtarzają (disctinct parts). Przez $p(\mathcal{O};n)$ oznaczmy natomiast ilość wszystkich podziałów liczby n, których składnikami są liczby nieparzyste (odd parts).

Twierdzenie 5. *Funkcja tworząca dla liczb $p(\mathcal{D};n)$ jest postaci*

$$\prod_{j\geqslant 1}(1+x^j) = \sum_{n\geqslant 0} p(\mathcal{D};n)x^n. \tag{8}$$

Dowód. Wystarczy porównać współczynniki po obu stronach (8). □

Wniosek 1 (Euler)**.** *Dla dowolnego n mamy $p(\mathcal{D};n) = p(\mathcal{O};n)$.*

Dowód. Funkcję tworząca dla liczb $p(\mathcal{O};n)$ możemy wyprowadzić z (4). Należy jedynie pokazać, że jest tożsama funkcji tworzącej (8), co z kolei można pokazać na przykład tak:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots &= \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots\\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots\end{aligned}$$

□

Niech $p(H;m,n)$ oznacza ilość podziałów liczby n na m składników, których należą do zbioru H. Zdefiniujemy funkcję tworzące dwóch zmiennych

$$\begin{aligned}f_H(z;q) &= \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} p(H;m,n)z^m q^n\\ &= \sum_{\lambda} z^{\#(\lambda)}q^{\sigma(\lambda)}\end{aligned}$$

gdzie druga suma jest po wszystkich podziałach $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ takich, że $\lambda_i \in H$ oraz $\#(\lambda) = r$ i $\sigma(\lambda) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$.

Z Twierdzenia 3 otrzymujemy

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} p(H;m,n)z^m q^n = \prod_{n\in H}\frac{1}{(1-zq^n)}, \tag{9}$$

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} p(H\leqslant d;m,n)z^m q^n = \prod_{n\in H}\frac{(1-z^{d+1}q^{(d+1)n})}{(1-zq^n)}. \tag{10}$$

3 Przykłady

Przykład 4. Załóżmy, że mamy banknoty o nominałach $3, 7, 23$ oraz 1000. Pytamy, ile jest możliwości aby rozmienić banknot 1000? Rozwiązaniem jest współczynnik przy x^{1000} w rozwinięciu w szereg poniższej funkcji

$$\frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \frac{1}{1-x^{23}}.$$

Z drugiej strony, w ogólności problem decyzyjny czy dana liczba jest sumą innych danych liczb jest problemem NP-trudnym.

Podział λ liczby n nazywamy samo-sprzężonym, jeżeli sprzężenie λ^* podziału λ jest tym samym podziałem, tzn. $\lambda = \lambda^*$. Przykładem podziału sprzężonego jest np. $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ liczby 8.

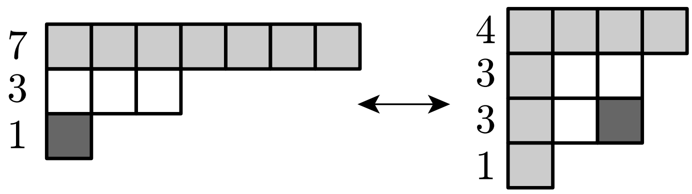
Twierdzenie 6. *Ilość podziałów liczby n na składniki, które są różnymi liczbami nieparzystymi jest równa liczbie samo-sprzężonych podziałów liczby n.*

W prosty sposób możemy pokazać, że funkcja tworząca dla pierwszych liczb z twierdzenia jest postaci:

$$\prod_{j \geqslant 0} (1 + x^{2j+1}).$$

Niestety, wyprowadzenie funkcji tworzącej dla drugich liczb jest znacznie trudniejsze. Inny, znacznie prostszy dowód wykorzystuje diagramy Ferrersa.

Dowód. Pokażemy bijekcję f między podziałami A : na różne liczby nieparzyste a podziałami B : samo-sprzężonymi na przykładzie podziału $\lambda = (7, 3, 1)$, dla której $f(\lambda) = (4, 3, 3, 1)$. Operacja f polega na "zagięciu" nieparzystych składników λ_i podziału A w połowie i umieszczanie symetrycznie w środku tworząc podział B – porównaj z Rysunkiem 2.



Rysunek 2: Przykład działania bijekcji.

□

Niech $p(n)$ oznacza ilość podziałów liczby n, wtedy

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k\geqslant 1} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}} \right]_{x=n} \tag{11}$$

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\leqslant h\leqslant k-1 \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k} \tag{12}$$

gdzie $\omega_{h,k}$ jest pewnym zespolonym pierwiastkiem równania $x^{24} = 1$.

Literatura

[1] George E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encycl. Math. Appl. Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, MA 1976.

[2] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Vol.1*, Cambridge University Press 2002.

[3] Herbert S. Wilf, *Lectures on Integer Partitions*, University of Pennsylvania 2000.

[4] Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, New York 1990.