Funkcje tworzące dwóch zmiennych
Kernel method

M. Dziemiańczuk

9 kwietnia 2014

Oznaczmy przez $P(n,k)$ liczbę ścieżek kratowych z punktu $(0,0)$ do (n,k), gdzie $n,k \geqslant 0$, które składają się z segmentów $H=(1,0), V=(0,1), D=(1,1), S=(-1,1)$ oraz zawierają jedynie te punkty kraty $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, których obie współrzędne są nieujemne. Dla przykładu, $P(1,1)=5$, ponieważ mamy pięć ścieżek z początku układu do $(1,1)$:

$$D, \quad HV, \quad HHS, \quad VH, \quad HSH.$$

Zdefiniujmy funkcję tworzącą dwóch zmiennych dla liczb $P(n,k)$, tzn.

$$A(x,y) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} P(n,k)x^n y^k.$$

Twierdzenie 1. *Mamy*

$$\sum_{k\geqslant 0} P(0,k)y^k = \frac{1-y-\sqrt{1-6y-3y^2}}{2y(1+y)}. \tag{1}$$

oraz

$$A(x,y) = \frac{1+3y+\sqrt{1-6y-3y^2}}{2(1+y)(x-y-xy-yx^2-x^2)}. \tag{2}$$

Dowód. Rozważane ścieżki składają się z czterech rodzajów segmentów, dlatego łatwo pokazać, że $P(n,k)$ spełniają dla $n,k\geqslant 0$ następujące równanie rekurencyjne

$$P(n,k) = P(n-1,k) + P(n,k-1) + P(n-1,k-1) + P(n+1,k-1)$$

oraz $P(n,0)=1$ dla $n\geqslant 0$. Dla $n,k<0$, przyjmujemy $P(n,k)=0$. Korzystając z relacji rekurencyjnej i standardowych przekształceń możemy pokazać, że

$$A(x,y) = 1 - \frac{y}{x}\sum_{k\geqslant 0} P(0,k)y^k + \left(x+y+xy+\frac{y}{x}\right)A(x,y).$$

Upraszaczając i wymnażając obie strony przez x otrzymamy równanie funkcyjne

$$A(x,y)\left(x-y-xy-yx^2-x^2\right) = x - y\sum_{k\geqslant 0} P(0,k)y^k.$$

Możemy pozbyć się lewej strony równania przez podstawienie za x pierwiastka równania kwadratowego $(x-y-xy-yx^2-x^2=0)$, tzn.

$$x \mapsto \frac{1-y\pm\sqrt{1-6y-3y^2}}{2(1+y)}.$$

Otrzymamy wówczas

$$\sum_{k\geqslant 0} P(0,k)y^k = \frac{1-y\pm\sqrt{1-6y-3y^2}}{2y(1+y)}.$$

Wybieramy ten pierwiastek, dla którego współczynnik przy y^0 jest równy $P(0,0)=1$. Podstawiając go do

$$A(x,y) = \frac{x-y\sum_{k\geqslant 0} P(0,k)y^k}{x-y-xy-yx^2-x^2}$$

oraz upraszczając otrzymujemy ostateczną postać funkcji $A(x,y)$. □

Uwagi. Więcej na temat Kernel method znajdziemy w [1, str. 190].

Literatura

[1] M. Kauers and P. Paule. *The Concrete Tetrahedron.* SpringerWienNewYork, 2011.

[2] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1994.