Zasada Włączania - Wyłączania

Przygotował: M. Dziemiańczuk

12 grudnia 2011

Streszczenie

Krótkie wprowadzenie do zasady włączania-wyłączania oraz dwa przykłady: wyprowadzenie (1) liczby suriekcji oraz (2) nieporządków.

1 Wprowadzenie

Niech X jest skończonym uniwersum pewnych obiektów oraz $P_1, P_2, \ldots, P_k$ rodziną dowolnych podzbiorów zbioru X. Głównym problemem na jaki odpowiada metoda włączania-wyłączania jest liczność zbioru tych $x \in X$, które nie należą do żadnego spośród zbiorów $P_1, \ldots, P_k$.

Dlatego często pomocnym przy wykorzystywaniu tej metody jest myślenie "zanegowane". Przykładowo, niech X będzie rodziną wszystkich podziałów liczby naturalnej n. Zamiast zliczać podziały n na składniki nieparzyste, myślimy o tym jak zliczać podziały, które **nie** zawierają składników parzystych. I w tym przypadku podzbiory P_i identyfikujemy z tymi klasami podziałów, które zawierają składniki parzyste.

Dla dowolnego $0 \leqslant r \leqslant k$ i dla dowolnego ciągu $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$ oznaczmy

$$N(i_1, \ldots, i_r) = |P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_r}|, \tag{1}$$

$$W(r) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k} N(i_1, \ldots, i_r), \tag{2}$$

gdzie $W(0) = |X|$. Oznaczmy przez $D(r)$ liczność zbioru tych $x \in X$, które należą do dokładnie r spośród zbiorów $P_1, \ldots, P_k$.

Twierdzenie 1. *Niech $k > 0$ oraz $r \leqslant k$, wtedy*

$$D(r) = \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{r+j}{r} W(r+j). \tag{3}$$

Dowód zamieszczony jest w [3, str. 43]. Dla szczególnego przypadku, gdy $r = 0$, otrzymujemy *Zasadę włączania-wyłączania* nazywaną również *formułą sita*

$$D(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j W(j). \tag{4}$$

2 Liczba suriekcji[1]

Oznaczmy przez $s_{n,m}$ liczbę suriekcji f (funkcji "na") ze zbioru n-elementowego $[n]$ w zbiór k-elementowy $[k]$. Zbiór wartości funkcji f oznaczmy przez $f([n])$. Przypomnijmy, suriekcje to funkcje, które odwzorowują dziedzinę na cały zbiór wartości (w tym wypadku $[k]$). Zatem, jeśli $f : [n] \to [k]$ jest suriekcją, to nie istnieje takie $i \in [k]$, że $f^{-1}(i) = \emptyset$. Innymi słowy $f([n]) = [k]$.

Twierdzenie 2. *Mamy*

$$s_{n,m} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n. \tag{5}$$

Dowód. Niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : [n] \to [k]$, natomiast P_i zbiorem tych $f \in X$, że $i \notin f([n])$ dla $i \in [k]$. Zgodnie z przyjętą notacją naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości $D(0)$, czyli liczności zbioru tych funkcji $f \in X$, które nie należą do żadnego ze klas P_i. Zatem

$$\begin{aligned} s_{n,m} &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j W(j) \\ &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} N(i_1, \ldots, i_j) \\ &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} |P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}| \end{aligned} \tag{6}$$

Zauważmy, że $P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}$ jest zbiorem tych funkcji, które nie przyjmują wartości $i_1, i_2, \ldots, i_j$. Jest ich dokładnie j, zatem zbiór wartości tych funkcji jest rozmiaru co najwyżej $(m-j)$, ostatecznie $|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}| = (m-j)^n$. Natomiast wszystkich ciągów $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m$ jest $\binom{m}{j}$, zatem

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant m} |P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}| = \binom{m}{j} (m-j)^n,$$

Podstawiając powyższe do (8) kończymy dowód. □

[1] Zdaniem PWN powinno się pisać suriekcja i iniekcja zamiast surjekcja i injekcja zgodnie z zasadą, która zdecydowała o zmianie pisowni wyrazów warjat na wariat czy majta na mania w latach 30 ubiegłego wieku.

Zadanie 1. *Niech $S(n,k)$ oznacza liczbę podziałów zbioru $[n]$ na $[k]$ bloków niepustych i parami-rozłącznych bloków. Liczby $S(n,k)$ nazywane są liczbami* Stirlinga II rodzaju. *Jaki jest związek między $S(n,k)$ oraz $s_{n,k}$?*

3 Liczba nieporządków

Niech σ będzie permutacją zbioru $[n]$ elementowego. Permutację σ nazywamy *nieporządkiem* (permutacją bez punktów stałych) gdy dla każdego $i \in [n]$ $\sigma(i) \neq i$. Przykładowo, permutacja $\alpha = (12)(3)(45)$ nie jest nieporządkiem gdyż $\alpha(3) = 3$, natomiast $(12)(345)$ jest nieporządkiem.

Twierdzenie 3. *Oznaczmy przez d_n liczbę nieporządków zbioru n-elementowego $[n]$, wtedy*

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)!. \tag{7}$$

Dowód. Niech X będzie zbiór wszystkich permutacji zbioru $[n]$ oraz P_i będzie zbiorem tych permutacji $\pi \in X$, że $\pi(i) = i$ dla dowolnego $i \in [n]$. Zatem d_n jest licznością zbioru tych permutacji, które nie należą do żadnego spośród $P_1, \ldots, P_n$.

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j W(j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} N(i_1, \ldots, i_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} |P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}| \end{aligned} \tag{8}$$

Aby dokończyć dowód musimy wyznaczyć moc przecięcia zbioru $P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}$, czyli zbioru tych permutacji $\sigma \in X$, dla których mamy $\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, \ldots, \sigma(i_j) = i_j$. Łatwo zauważyć, że jest ich dokładnie tyle co permutacji zbioru $[n] - \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$ czyli $(n-j)!$ bez względu na ciąg $i_1, \ldots, i_j$. Z kolei wszystkich ciągów $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n$ jest $\binom{n}{j}$, zatem

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant n} |P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_j}| = \binom{n}{j} (n-j)!$$

co kończy dowód. □

Historycznie. Jak podaje Flachsmeyer [1, str. 210], pytanie o liczbę nieporządków nazywane bywało zadaniem Eulera. Wcześniej badał te liczby francuski matematyk Montmort (1713).

Literatura

[1] J. Flachsmeyer, *Kombinatoryka, Podstawowy wykład w ujęciu mnogościowym*, Wydanie drugie, PWN, Warszawa 1977.

[2] A. K. Kwaśniewski, *AKK Home page*, `http://ii.uwb.edu.pl/akk/`.

[3] Witold Lipski, Wiktor Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.