

Liczby Bella - Dobiński Formula

Przygotował: M. Dziemiańczuk

18 stycznia 2011

Streszczenie

Wyprowadzenie jawnego wzoru (Dobinski formula) dla liczb Bella przy użyciu funkcji tworzących. Rozwiązanie pochodzi od Wilfa [3], podobne znajdziemy u Roty [1].

1 Definicja

Niech B_n oznacza liczbę podziałów zbioru n -elementowego na niepuste, parami rozłączne podzbiory dające w sumie zbiór wyjściowy. Przyjmujemy $B_0 = 1$. Dalej mamy $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ itd.

Przykład 1. Weźmy $n = 3$, wtedy $B_3 = 5$ ponieważ mamy: $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

Cwiczenie 1. Wykazać kombinatorycznie, że dla $n \geq 1$ zachodzi:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}. \quad (1)$$

2 Wzór Dobińskiego

Niech

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (2)$$

Po zróżniczkowaniu funkcji $F(x)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= \sum_{n \geq 1} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na splot otrzymamy równanie różniczkowe $\frac{dF(x)}{dx} = e^x F(x)$, które po zlogarytmowaniu przyjmie postać

$$\ln |F(x)| = e^x + C \quad \Rightarrow \quad F(x) = \exp\{e^x + C\}$$

Z warunków początkowych otrzymamy $C = -1$, ostatecznie

$$F(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} e^{e^x}. \quad (3)$$

Twierdzenie 1 (Dobiński formula). *Dla $n \geq 0$ mamy*

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}. \quad (4)$$

Dowód. Wystarczy “wydobyć” współczynnik przy $x^n/n!$ w rozwinięciu funkcji (3) w szereg wykładniczy zgodnie z (2).

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{xk}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(xk)^n}{n!k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Literatura

- [1] Gian-Carlo Rota, *The Number of Partitions of a Set*, American Mathematical Monthly, Vol. 71, no. 5, May 1964, pages 498–504.
- [2] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Vol.1*, Cambridge University Press 2002.
- [3] Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, New York 1990.
- [4] Andrzej K. Kwaśniewski, *Home Page AKK* - <http://ii.uwb.edu.pl/akk/>.