Liczby Stirlinga II rodzaju - definicja i własności

Liczby Stirlinga II rodzaju oznaczane symbolem $S(n,k)$ lub $\left\{ {n \atop k} \right\}$ można definiować jako współczynniki w rozwinięciu

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \ , \qquad n \geqslant 0 \tag{1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x(x-1)\dots(x-n+1) \ , \qquad n \geqslant 1 \\ x^{\underline{0}} &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Zostały one wprowadzone (razem z liczbami Stirlinga I rodzaju) przez Jamesa Stirlinga w dziele "Methodus Differentialis" wydanym w Londynie w roku 1730.

Definicja i interpretacje kombinatoryczne

Definicja 1. $\left\{ {\mathbf{n} \atop \mathbf{k}} \right\}$ *jest równe liczbie k- blokowych partycji zbioru n- elementowego. (Przypomnijmy, że partycją zbioru nazywamy rodzinę jego niepustych, parami rozłącznych podzbiorów, które w sumie dają cały zbiór)*

Na przykład $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ ponieważ zbiór $\{1,2,3,4\}$ możemy podzielić na dwa bloki następująco:
$\Big\{\{1\},\{2,3,4\}\Big\}$, $\Big\{\{2\},\{1,3,4\}\Big\}$, $\Big\{\{3\},\{1,2,4\}\Big\}$, $\Big\{\{4\},\{1,2,3\}\Big\}$,
$\Big\{\{1,2\},\{3,4\}\Big\}$, $\Big\{\{1,3\},\{2,4\}\Big\}$, $\Big\{\{1,4\},\{2,3\}\Big\}$.

UWAGA: Ilekroć poniżej będzie mowa o przypisywaniu ludzi do stolików lub do pokoi, to przyjmujemy, że:

– **osoby są rozróżnialne**;

– **pokoje są rozróżnialne**, np. ponumerowane;

– **stoliki są nierozróżnialne** (identyczne).

Obserwacja 1. Liczba rozmieszczeń n różnych przedmiotów (np. kulek, każda innego koloru) do m identycznych pudełek, gdy zajętych jest dokładnie k pudełek równa się $\left\{{n \atop k}\right\}$, $(m \geqslant k,\ n \geqslant k)$.

Podobnie : n osób możemy rozsadzić przy dokładnie k stolikach na $\left\{{n \atop k}\right\}$ sposobów, jeśli przy stoliku może siedzieć nieograniczona liczba osób i sposób ich usadzenia przy danym stoliku nie ma znaczenia.
Wyjaśnienie: przeprowadź następujące przyporządkowanie:
- elementy zbioru $\longrightarrow$ przedmioty (osoby);
- bloki podziału $\longrightarrow$ pudełka (stoliki);
skorzystaj z zasady bijekcji i Definicji 1.

Obserwacja 2. Liczba sposobów ulokowania n osób w m pokojach, gdy w każdym z pokoi jest co najmniej jedna osoba jest równa $m!\left\{{n \atop m}\right\}$ (dzielimy osoby na m grup, a następnie grupy przyporządkowujemy w sposób "1-1"do pokoi)

Liczba sposobow ulokowania n osób w dokładnie k spośród m pokoi jest równa

$$\binom{m}{k} k! \left\{ {n \atop k} \right\} = m^{\underline{k}} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{3}$$

Łatwo policzyć, że liczba wszystkich rozmieszczeń n osób w m pokojach jest równa m^n. Z drugiej strony możemy policzyć te rozmieszczenia sumując prawą stronę (3) po $k = 0, 1, 2, ..., n$. Otrzymujemy więc:

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} m^{\underline{k}} \,, \tag{4}$$

czyli równanie (1) dla $m \in \mathbb{N}$. Obie jego strony to wielomiany stopnia n równe dla wszystkich liczb $m \in \mathbb{N}$, a zatem także dla $x \in \mathbb{R}$.

Z powyższego rozumowania wynika, że równanie (1) i Definicja 1 są sobie równoważne.

Obserwacja 3. Liczba słów długości n złożonych z dokładnie k różnych liter wybranych z m- znakowego alfabetu równa się $m^{\underline{k}}\left\{ {n \atop k} \right\}$.
Wyjaśnienie: przeprowadź nastepujące przyporządkowanie:
- ludzie $\longrightarrow$ litery w słowie;
- pokoje $\longrightarrow$ znaki alfabetu;
skorzystaj z zasady bijekcji i równania (3).

Obserwacja 4. Niech A, B będą zbiorami skończonymi takimi, że $|A| = n$, $|B| = m$, $(n \geqslant m)$. Liczba suriekcji $f : A \to B$ równa się $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$.
Wyjaśnienie: przeprowadź następujące przyporządkowanie:
- ludzie $\longrightarrow$ elementy zbioru A;
- pokoje $\longrightarrow$ elementy zbioru B;
skorzystaj z zasady bijekcji i Obserwacji 2.

Obserwacja 5. Liczba będąca iloczynem n różnych liczb pierwszych może być przedstawiona w postaci iloczynu k różnych czynników (niekoniecznie będących liczbami pierwszymi) na $\left\{ {n \atop k} \right\}$ sposobów.
Wyjaśnienie: ?????

Obserwacja 6. W kryptografii i kryptoanalizie klasyfikuje się słowa wg ich tzw. ciągów modelowych. Polega to na tym, że litery słowa czytane od lewej do prawej są kodowane liczbami $1, 2, 3, ...$, np.: słowo KOMBINATORYKA będzie kodowane ciągiem $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 9, 10, 1, 7,$ a słowo MATEMATYKA ciągiem $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 6, 2$. Liczba ciągów modelowych odpowiadających słowom n -literowym (czyli długości n) składającym się z k różnych liter jest równa $\left\{ {n \atop k} \right\}$.
Wskazówka do wyjaśnienia: powtarzające się litery wkładamy do pudełka z liczbą.

Niech strofa (zwrotka) wiersza składa się z n wersów. Możemy podzielić zbiór jej wersów na klasy w ten sposób, że w jednej klasie są wszystkie wersy, które rymują się ze sobą. Liczba takich n-wersowych strof, w których mamy

k różnych rymowań się wersów jest równa $\left\{ {n \atop k} \right\}$.
Wyjaśnienie:?????

Obserwacja 7. Rozważmy permutacje n liczb. Każda permutacja może być przedstawiona w postaci iloczynu rozłącznych cykli. Weźmy tylko te permutacje, których cykle (a konkretnie elementy tych cykli) są uporządkowane w pewien konkretny sposób, np. w porządku rosnącym. Permutacji n liczb spełniających tę własność i rozkładających się na k cykli jest $\left\{ {n \atop k} \right\}$.
Wyjaśnienie:?????

Rekurencja

Rozważmy usadzenia $(n+1)$ osób dookoła k stolików (tak, by przy każdym ze stolików siedziała co najmniej jedna osoba). Wyróżnijmy jedną osobę, np. ostatnią.

Może ona siedzieć przy stoliku sama. Wtedy pozostałe n osób będzie siedzieć przy $(k-1)$ stolikach (wszystkie zajęte) na $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ sposobów.

Alternatywna możliwość polega na tym, że wyróżniona osoba dosiada się do ktoregoś z k stolików zajetych już przez pozostałe n osób na $\left\{ {n \atop k} \right\}$ sposobów.

Stosując zasady: mnożenia i dodawania, mamy, że

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\} \tag{5}$$

Powyższe równanie rekurencyjne, wraz z warunkami brzegowymi:

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = \delta_{n,0}, \quad \left\{ {0 \atop k} \right\} = \delta_{0,k},$$

stanowi definicję ciągu liczb Stirlinga II rodzaju i umożliwia wypisanie tablicy ich wartości.

Ćwiczenie: Korzystając ze wzoru (5) sporządź tablicę wartości liczb Stirlinga II rodzaju dla $n,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Wzory

Obserwacja 8. Usadzamy n osób przy k stolikach tak, by przy każdym ze stolików siedziała co najmniej jedna osoba. Możemy to zrobić na $\left\{ n \atop k \right\}$ sposobów. Postępujemy w nastepujący sposób:

(1) ustawiamy wszystkie osoby w przypadkowej kolejności;

(2) pierwsze r_1 osób siada przy pierwszym stoliku, kolejne r_2 osoby - przy drugim , itd. do momentu aż ostatnie r_k osób siądzie przy k-tym stoliku.

Wszystkich ustawień n osób jest $n!$. Nie liczy się kolejność osób siedzących przy tym samym stoliku (dzielimy więc $n!$ przez $r_1!r_2!...r_k!$) oraz nie liczy sie kolejność (uporządkowanie, numerowanie) stolików, gdyż założyliśmy na początku, że stoliki są identyczne (dzielmy więc jeszcze przez $k!$). Liczby osób przy poszczególnych stolikach, czyli ciąg $r_1, r_2, ..., r_k$, wybieramy w dowolny sposób byleby były spełnione warunki:

$$r_1 + r_2 + ... + r_k = n, \qquad r_i \geqslant 1, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

stąd mamy, że

$$\left\{ n \atop k \right\} = \sum_{r_1+r_2+...+r_k=n, \ r_i \geqslant 1} \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!k!} \tag{6}$$

Obserwacja 9. Załóżmy, że przy usadzeniach opisanych wyżej przy a stolikach siedzi po jednej osobie, przy b stolikach- po dwie, przy c stolikach - po trzy, itd. W równaniu (6) składników odpowiadajacych takiej sytuacji jest $k!/(a!b!c!...)$.Wstawiając do (6) mamy:

$$\left\{ n \atop k \right\} = \sum \frac{n!}{(1!)^a (2!)^b (3!)^c ... k!} \cdot \frac{k!}{a!b!c!...},$$

gzie sumowanie przebiega po wszystkich całkowitych liczbach $a, b, c, ... \geqslant 0$ takich, że

$$a + b + c + ... = k, \qquad a + 2b + 3c + ... = n.$$

Otrzymujemy więc następujący wzór:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{a+b+c+...=k, \ a,\, b,\, c, ... \geqslant 0 \\ a+2b+3c+...=n}} \frac{n!}{(1!)^a (2!)^b (3!)^c ... a! b! c! ...}. \tag{7}$$

Obserwacja 10. Rozważmy inny niż wyżej algorytm rozsadzenia n osób dookoła k stolików (każdy stolik ma być zajęty). Ustawmy wszystkie osoby w pewnym określonym porządku, np. w porządku alfabetycznym.

Pierwszą osobę sadzamy przy pierwszym z brzegu, wolnym stoliku. Kolejne a_1 osób ($0 \leqslant a_1 \leqslant n-k$) usadzamy przy tym samym stoliku (na 1^{a_1} sposobów).

Osobę (a_1+2)-gą sadzamy przy pierwszym z brzegu, wolnym stoliku. Kolejne a_2 osób ($0 \leqslant a_2 \leqslant n-k$) usadzamy w dowolny sposób przy dwóch zajętych już stolikach (można to zrobić na 2^{a_2} sposobów).

Osoba (a_1+a_2+3)-cia siada przy pierwszym z brzegu, wolnym stoliku, a kolejne a_3 osób - przy trzech zajetych uprzednio stolikach (na 3^{a_3} sposobów), itd.

W ten sposób przy każdym ze stolików usiądzie co najmniej jedna osoba (będą to : $1, a_1+2, a_1+a_2+3, a_1+a_2+a_3+4, ...$). Liczby $a_1,\ a_2,\ ..., a_k \geqslant 0$ wybieramy tak, by spełniały warunek

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = n - k.$$

Otrzymujemy zatem następujący wzór

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{a_1+a_2+...+a_k=n-k \\ a_1,\, a_2, ..., a_k \geqslant 0}} 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} ... k^{a_k}. \tag{8}$$

Obserwacja 11. Jeżeli $n > k$, to (8) możemy zapisać w postaci :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_1 \leqslant ... \leqslant i_{n-k} \leqslant k} i_1 i_2 i_3 ... i_k. \tag{9}$$

Dlaczego? Każdy składnik $1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} ... k^{a_k}$ składa się z $a_1+a_2+...+a_k = n-k$ czynników (liczb ze zbioru $1, 2, 3, ..., k$). Zastępujemy każdy z czynników przez $i_j,\ \ j = 1, 2, 3, ..., n-k$, przy czym wartości i_j mogą się powtarzać.

Obserwacja 12. Rozmieszczamy n osób w m pokojach tak, by żaden z pokoi nie pozostał pusty. Wiemy z Obserwacji 2, że możemy to zrobić na $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$ sposobów. Obliczymy ten wynik w inny sposób.

Liczba dowolnych rozmieszczeń n osób w m pokojach jest równa m^n, ale znajdą sie w tej liczbie rozmieszczenia z pewnymi pokojami pustymi. Musimy więć odjąć te rozmieszczenia, w których i-ty pokój jest pusty ($i = 1, 2, ..., m$). Jest ich $\binom{m}{1}(m-1)^n$. Ale odjęliśmy w ten sposób dwukrotnie rozmieszczenia, w których np. pokoje i-ty i j-ty są puste ($i, j = 1, 2, ..., m,\ i \neq j$). Musimy więc skorygować swoje obliczenia dodając wszystkie rozmieszczenia w których oba pokoje są puste, a jest ich $\binom{m}{2}(m-2)^n$ przy dowolnym wyborze liczb i, j. Postępując dalej zgodnie z **zasadą włączeń i wyłączeń** mamy, że

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + ... + (-1)^m \binom{m}{m}(m-m)^n.$$

Upraszczając otrzymujemy kolejny wzór na liczby Stirlinga II rodzaju:

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}r^n = \sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\frac{r^n}{r!(m-r)!}\ . \tag{10}$$

Źródło:

D.Branson:*Stirling numbers and Bell numbers: their role in combinatorics and probability*, Math. Scientist **25**, 1-31 (2000)