Liczby Stirlinga I rodzaju - definicja i własności

Liczby Stirlinga I rodzaju oznaczane symbolem $s(n,k)$ można definiować jako współczynniki w rozwinięciu

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \quad , \qquad n \geqslant 0 \tag{1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x(x-1)\dots(x-n+1)\ , \qquad n \geqslant 1 \\ x^{\underline{0}} &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Zostały one wprowadzone (razem z liczbami Stirlinga II rodzaju) przez Jamesa Stirlinga w dziele "Methodus Differentialis"wydanym w Londynie w roku 1730.

Definicja i interpretacje kombinatoryczne

Łatwo zauważyć, że liczby $s(n,k)$ mogą być ujemne. Stąd interpretację kombinatoryczną posiadają liczby:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = |s(n,k)|,$$

oznaczane też symbolem $c(n,k)$ ($\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ czytamy: " na k cykli n").

Definicja 1. $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{k} \end{smallmatrix}\right]$ *jest równe liczbie k- cyklowych permutacji zbioru n- elementowego.*

Na przykład $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = 11$ ponieważ mamy następujące permutacje dwucyklowe zbioru $\{1,2,3,4\}$:

[1 2][3 4]; [1 3][2 4]; [1 4][2 3];

[1][2 3 4]; [1][2 4 3]; [2][1 3 4]; [2][1 4 3]; [3][1 2 4]; [3][1 4 2]; [4][1 2 3]; [4][1 3 2].

Obserwacja 1. Liczba sposobów podziału n obiektów na k niepustych, rozłącznych bloków z cyklicznym uporządkowaniem elementów na każdym bloku równa się $\left[{n \atop k}\right]$.

Obserwacja 2. Podobnie : n osób możemy rozsadzić przy dokładnie k okrągłych stolikach na $\left[{n \atop k}\right]$ sposobów, jeśli przy stoliku może siedzieć nieograniczona liczba osób i liczy się sposób ich usadzenia przy danym stoliku (czyli to, kto obok kogo siedzi).
Wyjaśnienie: przeprowadź następujące przyporządkowanie:
- elementy zbioru $\longrightarrow$ osoby;
- cykle permutacji $\longrightarrow$ stoliki;
skorzystaj z zasady bijekcji i Definicji 1.

Teraz ujednolicimy definicje liczb $\left[{n \atop k}\right]$ oraz $\left\{{n \atop k}\right\}$.
Mamy prostąkątne stoliki ustawione w rzędzie. Sadzamy przy nich osoby tak, że wszystkie siedzą po tej samej stronie wszystkich stołów (czyli tworzą "siedzący" szereg). Wtedy:
(D1) $\left[{n \atop k}\right]$ to liczba rozsadzeń n osób przy k stolikach (przy każdym stoliku co najmniej jedna osoba) takich, że przy lewym końcu stolika (z perspektywy siedzących) siedzi najstarsza spośród osob przy tym stoliku, a pozostałe osoby siedzą w dowolnej kolejności po jej prawej stronie.
(D2) $\left\{{n \atop k}\right\}$ to liczba rozsadzeń n osób przy k stolikach (przy każdym stoliku co najmniej jedna osoba) takich, że osoby przy każdym stoliku siedzą w kolejności od najstarszej (przy lewym końcu stolika) do najmłodszej (przy prawym końcu).

Obserwacja 3. Udowodnimy teraz, że

$$m^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} m^k, \tag{3}$$

gdzie

$$m^{\overline{n}} = m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1). \tag{4}$$

Załóżmy, że po jednej stronie korytarza mamy m pokoi (ponumerowanych). Rozmieszczamy w nich n osób (niektóre pokoje mogą pozostać puste) i ustawiamy w szeregu (od lewego końca pierwszego pokoju do prawego końca ostatniego pokoju). Ważne jest więc, do którego pokoju trafia dana osoba oraz to, która jest w tym pokoju (tzn. na jakiej pozycji od lewej do prawej). Łatwo zauważyć, że takich rozmieszczeń osób w pokojach jest $m^{\overline{n}}$.

Policzmy powyższe rozmieszczenia w inny sposób. Załóżmy, że mamy k prostokątnych stolików ($k = 0, 1, 2, ..., n$). Rozsadzamy przy nich n osób w sposób opisany w definicji **(D1)**. Możemy to zrobić na $\left[n \atop k \right]$ sposobów. Teraz stoliki wstawiamy do wspomnianych pokoi w dowolny sposób na m^k sposobów. Jeśli w pokoju znajdzie się więcej niż jeden stolik, to ustawiamy stoliki według malejącego (od lewej do prawej) wieku najstarszych osób przy każdym stoliku. Korzystając z zasady mnożenia i sumując powyższe sytuacje ze względu na $k = 0, 1, 2, ..., n$ otrzymujemy:

$$m^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] m^k,$$

czyli równość (3) dla $m \in \mathbb{N}$. Obie jego strony to wielomiany stopnia n równe dla wszystkich liczb $m \in \mathbb{N}$, a zatem także dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy więc

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^k, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Korzystając z własności

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}}$$

mamy, że

$$(-1)^n (-x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^k.$$

Po pomnożeniu obydwu stron powyższego równania przez $(-1)^n$ i zamianie $-x$ na x otrzymujemy następującą równość

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \left[n \atop k \right] x^k.$$

Porównując powyższe z równaniem (1) dostajemy wzór:

$$s(n,k) = (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Rekurencja

Rozważmy usadzenia $(n+1)$ osób przy k stolikach (tak, by przy każdym ze stolików siedziała co najmniej jedna osoba) w sposób opisany w definicji **(D1)**.

Wyróżnijmy najmłodszą osobę. Może ona siedzieć przy stoliku sama. Wtedy pozostałe n osób (starszych od niej) będzie siedzieć przy $(k-1)$ stolikach na $\left[{n \atop k-1}\right]$ sposobów.

Alternatywna możliwość polega na tym, że n najstarszych osób siada przy k stolikach (jak w **(D1)**) na $\left[{n \atop k}\right]$ sposobów, a osoba najmłodsza dosiada się do któregoś ze stolików zjmując miejsce po prawej stronie którejkolwiek ze starszych osób, czyli ma do wyboru n miejsc.

Korzystając z powyższego i zasady dodawania otrzymujemy równanie rekurencyjne dla liczb $\left[{n \atop k}\right]$:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Z równania (6) i powyższego otrzymujemy rekurencję dla liczb Stirlinga I rodzaju:

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k) \tag{7}$$

Powyższe równanie rekurencyjne, wraz z warunkami brzegowymi:

$$s(n,n) = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad s(n,0) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{n,0}, \quad s(0,k) = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \delta_{0,k},$$

stanowi definicję ciągu liczb Stirlinga I rodzaju i umożliwia wypisanie tablicy ich wartości.

Ćwiczenie

Wypisz wartości liczb $s(n,k)$ oraz $\left[{n \atop k}\right]$ dla $n,k = 0,1,2,3,4,5$.

Wzory

Obserwacja 4. Poniższy wzór na liczby Stirlinga II rodzaju:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r_1+r_2+...+r_k=n,\ r_i \geqslant 1} \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!k!} \tag{8}$$

wyraża też liczbę rozsadzeń n osób przy k stolikach według reguły **(D2)**.

Jeżeli przy stoliku siedzi r osób to zgodnie z regułą **(D1)** można je usadzić na $(r-1)!$ sposobów. Zatem z (8) i **(D1)** otrzymujemy

$$\left[{n \atop k} \right] = \sum_{r_1+r_2+...+r_k=n,\ r_i \geqslant 1} \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!k!}(r_1-1)!(r_2-1)!\dots(r_k-1)!,$$

czyli

$$\left[{n \atop k} \right] = \sum_{r_1+r_2+...+r_k=n,\ r_i \geqslant 1} \frac{n!}{r_1 r_2 ... r_k k!} \tag{9}$$

Obserwacja 5. Podobnie jak wyżej, ze wzoru

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{a+b+c+...=k,\ a,b,c,...\geqslant 0 \\ a+2b+3c+...=n}} \frac{n!}{(1!)^a(2!)^b(3!)^c...a!b!c!...}\,. \tag{10}$$

otrzymujemy

$$\left[{n \atop k} \right] = \sum_{\substack{a+b+c+...=k,\ a,b,c,...\geqslant 0 \\ a+2b+3c+...=n}} \frac{n!}{1^a 2^b 3^c ... a!b!c!...}\,. \tag{11}$$

Obserwacja 6. Ustawmy n osób w kolejności od najstarszej do najmłodszej i rozsadźmy je przy k stolikach zgodnie z regułą **(D1)**. Pierwsza osoba siada przy wolnym stoliku. i-ta osoba ($i = 2, 3, ..., n$) może usiąść po prawej stronie każdej z $(i-1)$ poprzednich osób przy już zajętych stolikach (na $(i-1)$ sposobów) albo usiąść przy nowym stoliku (stając się najstarszą osobą przy tym stoliku) na 1 sposób (bo stoliki są identyczne). Jeżeli mamy k stolików to niech osoby $1, i_1, i_2, ..., i_{k-1}$ będą najstarszymi przy swoich stolikach. Wówczas

$$\left[{n \atop k} \right] = \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_{k-1} \leqslant n} \frac{(n-1)!}{(i_1-1)(i_2-1)\dots(i_k-1)} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant w_1 < w_2 < ... < w_{k-1} \leqslant n-1} \frac{(n-1)!}{w_1 w_2 \dots w_{k-1}} \tag{12}$$

Wszystkie osoby mogą usiąść przy jednym stoliku na $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ sposobów, przy czym druga (w kolejności wieku) osoba siada na jeden sposób, trzecia - na 2, czwarta - na 3 itd. , i-ta osoba ma do wyboru $(i-1)$ miejsc. Jeśli jednak i-ta osoba wybiera nowy stolik to z wyrażenia $(n-1)!$ "wypada" czynnik $(i-1)$, bo ma ona do wyboru tylko jedno miejsce przy nowym stole. Stąd dzielenie przez odpowiednie czynniki we wzorze (12).

Jeśli $n > k$, to wzór (12) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{1 \leqslant v_1 < v_2 < \ldots < v_{n-k} \leqslant n-1} v_1 v_2 \ldots v_{n-k}. \tag{13}$$

Powyższy wzór możemy otrzymać korzystając z równania (5). Należy rozwinąć (wymnożyć) lewą stronę wzoru i porównać współczynniki przy odpowiednich potęgach x po jego prawej i lewej stronie.

Wzory inwersyjne dla liczb $\left\{ {n \atop k} \right\}$ oraz $s(n,k)$

Przypomnijmy wzory definiujące liczby Stirlinga I i II rodzaju:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \ , \qquad n \geqslant 0 \tag{14}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \ , \qquad n \geqslant 0 \tag{15}$$

Wstawiając (15) do prawej strony (14) (i odwrotnie) oraz porównując odpowiednie współczynniki przy potęgach x otrzymamy tzw. wzory inwersyjne. Mamy więc:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \sum_{l=0}^{k} s(k,l) x^l = \sum_{l=0}^{n} \left[\sum_{k=l}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} s(k,l) \right] x^l,$$

a stąd

$$\sum_{k=l}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} s(k,l) = \sum_{l=k}^{n} (-1)^{k-l} \left\{ {n \atop k} \right\} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \delta_{n,l}. \tag{16}$$

Podobnie

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \sum_{l=0}^{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} x^{\underline{l}} = \sum_{l=0}^{n} \left[\sum_{k=l}^{n} s(n,k) \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} \right] x^{\underline{l}},$$

a stąd

$$\sum_{k=l}^{n} s(n,k) \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} = \sum_{l=k}^{n} (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} = \delta_{n,l}. \tag{17}$$

Źródło:

D.Branson:*Stirling numbers and Bell numbers: their role in combinatorics and probability*, Math. Scientist **25**, 1-31 (2000)