Liczby Bella

Definicja 1. *Niech* $\mathbf{B_n}$ *będzie równe liczbie wszystkich partycji zbioru n-elementowego. (Przypomnijmy, że partycją zbioru nazywamy rodzinę jego niepustych, parami rozłącznych podzbiorów, które w sumie dają cały zbiór). Korzystając z interpretacji kombinatorycznej liczb Stirlinga II rodzaju* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *mamy, że*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}, \tag{1}$$

przy założeniu, że $B_0 = 1$ *(zbiór pusty posiada dokładnie jedną partycję). Ciąg* $\{B_n\}_{n \geqslant 0}$ *nazywamy* **ciągiem liczb Bella** *(lub ciągiem liczb eksponencjalnych).*

Uwaga: Ilekroć poniżej będzie mowa o przypisywaniu ludzi do stolików lub do pokoi, to przyjmujemy, że:

– **osoby są rozróżnialne**;

– **stoliki są nierozróżnialne** (identyczne).

Obserwacja 1. Korzystając ze znanych już interpretacji kombinatorycznych liczb $\left\{ {n \atop k} \right\}$ można udowodnić następujące **interpretacje kombinatoryczne liczb Bella**:

(1) B_n - liczba rozmieszczeń n różnych obiektów w co najwyżej n identycznych pudełkach.

(2) B_n - liczba usadzeń n osób dookoła co najwyżej n stolików (gdy nieważny jest sposób usadzenia osób przy stoliku).

(3) Liczba naturalna będąca iloczynem n różnych liczb pierwszych może być przedstawiona w postaci iloczynu różnych czynników na B_n sposobów.

(4) B_n - liczba ciągów modelowych dla słów długości n.

(5) B_n - liczba różnych schematów rymowych w strofie n-wersowej.

(6) B_n - liczba permutacji zbioru $\{1, 2, ..., n\}$ z określonym porządkiem na wszystkich cyklach.

(7) Wiadomo, że relacja równoważności dzieli zbiór, na którym jest określona na rozłączne i niepuste klasy abstrakcji. Wynika stąd i z Definicji 1, że B_n - liczba relacji równoważności na zbiorze n-elementowym.

(8) σ- ciałem nad zbiorem skończonym A nazywamy rodzinę podzbiorów A zamkniętą ze względu na sumy przeliczalne i dopełnienia zbiorów. Każda partycja zbioru generuje σ-ciało (bierzemy wszystkie sumy i dopełnienia bloków partycji). Z kolei każdemu σ-ciału odpowiada dokładnie jedna partycja zbioru A. Jej bloki otrzymujemy biorąc dla każdego $a \in A$ najmniejszy podzbiór zawierający a i należący do σ-ciała (otrzymane zbiory będą rozłączne). Z powyższego wynika, że liczba różnych σ-ciał nad zbiorem o n elementach jest równa liczbie wszystkich partycji tego zbioru, czyli B_n.

Rekurencja

Rozważmy usadzenia $(n+1)$ osób dookoła co najwyżej $(n+1)$ stolików (niektóre stoliki mogą być puste). Wyróżnijmy jedną osobę, np. ostatnią.

Może ona siedzieć przy stoliku z r innymi osobami ($r = 0, 1, 2, ..., n$), które można wybrać na $\binom{n}{r}$ sposobów spośród innych osób. Wtedy pozostałe $(n-r)$ osób może usiąść przy co najwyżej n stolikach na B_{n-r} sposobów. Stosując zasady: mnożenia i dodawania, mamy, że

$$B_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_{n-r} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_s \tag{2}$$

Powyższe równanie rekurencyjne, wraz z warunkiem brzegowym: $B_0 = 1$ stanowi kolejną definicję ciągu liczb Bella i umożliwia wypisanie tablicy ich wartości.

Ćwiczenie

Korzystając z powyższego wypisz wartości liczb B_n dla $n = 0, 1, ..., 10$.

Eksponencjalna funkcja tworząca

Eksponencjalna funkcja tworząca ciągu liczb Bella jest postaci:

$$B(x) = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Jej zwartą postać możemy znaleźć korzystając z faktu, że

$$\sum_{n \geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \qquad k \geqslant 0.$$

Sumując obie strony powyższego równiania po $k \geqslant 0$ otrzymujemy

$$\sum_{k \geqslant 0} \sum_{n \geqslant k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

oraz

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \exp\left\{ e^x - 1 \right\},$$

a stąd

$$\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left\{ e^x - 1 \right\}. \tag{3}$$

Powyższe równanie możemy przedstawić w postaci:

$$\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left\{ e^x - 1 \right\} = \exp\left\{ -1 \right\} \cdot \exp\left\{ \exp x \right\} = e^{-1} \sum_{r \geqslant 0} \frac{(e^x)^r}{r!} =$$

$$= e^{-1} \sum_{r \geqslant 0} \frac{e^{xr}}{r!} = e^{-1} \sum_{r \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n r^n}{n! r!} = e^{-1} \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{r \geqslant 0} \frac{r^n}{r!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Porównując współczynniki przy potęgach x otrzymujemy stąd **wzór Dobińskiego**:

$$B_n = e^{-1} \sum_{r \geqslant 0} \frac{r^n}{n!}. \tag{4}$$

Wzór ten jest podstawą do probabilistycznej interpretacji liczb Bella. Są one mianowicie momentami zwykłymi rozkładu Poissona z parametrem $\lambda = 1$.

Źródło:

D.Branson:*Stirling numbers and Bell numbers: their role in combinatorics and probability*, Math. Scientist **25**, 1-31 (2000)