6 Przestrzenie wektorowe

1. Niech $V = (0, \infty)$. Pokazać, że dla działań zdefiniowanych przez:

   - $\oplus : V \times V \ni (a, b) \to a \cdot b \in V$,
   - $\odot$: $R \times V \ni (\lambda, a) \to a^{\lambda} \in V$

   struktura $(V, R, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią wektorową.

2. Zbadaj liniową niezależność wektorów

   (a) $(1, 2, 3)$,$(-2, -4, -6)$

   (b) $(1, 0, 1)$, $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, 2)$

   (c) $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 0, 2)$ w przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych.

3. Pokaż, że wektory $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 0)$ oraz $(0, 1, 2)$ tworzą bazę w przestrzeni R^3. Przedstaw wektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ w tej bazie.

4. W przestrzeni wektorowej $(R^4, R, +, \cdot)$ zbadać liniową niezależność wektorów $(1, 1, 0, 1)$, $(2, 2, 2, 0)$, $(-1, 2, 3, 1)$, i przedstawić wektor $(-3, 4, 9, 5)$ jako kombinację liniową tych wektorów. Czy każdy wektor z $(R^4, R, +, \cdot)$ można przedstawić jako kombinację liniową tych wektorów?

5. Wyznacz bazę przestrzeni generowanej przez wektory

   (a) $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 2, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 7, 7), \mathbf{v}_4 = (-1, 1, 7), \mathbf{v}_5 = (7, 7, 1)$

   (b) $\mathbf{v}_1 = (4, 5, 6), \mathbf{v}_2 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1), \mathbf{v}_4 = (3, 0, 1), , \mathbf{v}_5 = (7, 6, 9)$, $\mathbf{v}_6$ =(1,3,1)

   (c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{v}_5 = (0, 1, 2, 3)$

   (d) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (4, 3, 2, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{v}_5 = (7, 6, 5, 4)$

6. Pokaż, że przestrzeń $R_{2\times 2}$ jest przestrzenią generowaną przez wektory: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Wyznacz przestrzeń rozwiązań jednorodnego układu równań oraz bazę tej przestrzeni:

   (a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

8. Zbadaj, czy wektor b należy do przestrzeni generowanej przez wektory będące kolumnami macierzy A: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (4, 4, 5)$.

9. Zbadaj, czy wektor b należy do przestrzeni generowanej przez wektory będące wierszami macierzy A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (-2, 4, 5, 6, 6)$.

10. Wyznacz liczbę a taką, że v należy do podprzestrzeni W:
    (a) $W = L\{(1, 0, -1), (-1, 3, 2)\}$, $v = (2, a, -1)$
    (b) $W = L\{(-1, 2, 2), (1, -1, 0)\}$, $v = (2, 3, a)$

11. Wyznaczyć wektor współrzednych $[v]_B$ wektora v względem bazy B:
    (a) $v = (4, 0), B = \{(5, -6), (1, -2)\}$
    (b) $v = (3, 13, -1), B = \{(-1, 2, 0), (4, 1, 3), (1, 3, -2)\}$
    (c) $v = (9, 6, 11, 0), B = \{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, -1), (0, 1, 1, -1), (2, 1, 3, 1)\}$

12. Wyznaczyć wektor v, gdy znane są baza B i wektor $[v]_B$:
    $[v]_B = (3, 2, 1)$, $B = \{(1, 4, 3), (5, 1, 1), (4, 7, 0)\}$

13. Sprawdzić, który z poniższych zbiorów jest podprzestrzenią danej przestrzeni wektorowej
    (a) $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^2$
    (b) $\{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^2$
    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}$ w $\mathbb{R}^2$
    (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ w $\mathbb{R}^3$
    (e) $\{(2x - 1, 2y + z, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^3$
    (f) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0, y - t = 0\}$w $\mathbb{R}^4$
    (g) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{xa} = 0\}$ w $\mathbb{R}^n$, gdzie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

14. Niech U będzie następującą podprzestrzenią w R^3:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}. \tag{1}$$

Wykaż, że wektor $(2, 0, -1)$ należy do tej podprzestrzeni. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz wyraź ten wektor w tej bazie.

15. Niech $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $\ldots$, $p_n(x) = x^n$ dla $x \in R$ oraz $n \in N_+$. Pokazac, że dla dowolnego n, wektory $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tworzą bazę w przestrzeni wektorowej wielomianów rzeczywistych stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.