6 Przestrzenie wektorowe

1. Niech $V = (0, \infty)$. Pokazać, że dla działań zdefiniowanych przez:

   - $\oplus : V \times V \ni (a, b) \to a \cdot b \in V$,
   - $\odot$: $R \times V \ni (\lambda, a) \to a^\lambda \in V$

   struktura $(V, R, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią wektorową.

2. Zbadaj liniową niezależność wektorów

   (a) $(1, 2, 3)$,$(-2, -4, -6)$

   (b) $(1, 0, 1)$, $(-1, 2, 1)$, $(0, 2, 2)$

   (c) $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(3, 0, 2)$ w przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych.

3. Pokaż, że wektory $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 0)$ oraz $(0, 1, 2)$ tworza baze w przestrzeni R^3. Przedstaw wektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ w tej bazie.

4. W przestrzeni wektorowej $(R^4, R, +, \cdot)$ zbadać liniową niezależność wektorów $(1, 1, 0, 1)$, $(2, 2, 2, 0)$, $(-1, 2, 3, 1)$, i przedstawić wektor $(-3, 4, 9, 5)$ jako kombinację liniową tych wektorów. Czy każdy wektor z $(R^4, R, +, \cdot)$ można przedstawić jako kombinację liniową tych wektorów?

5. Wyznacz bazę przestrzeni generowanej przez wektory

   (a) $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 2, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 7, 7), \mathbf{v}_4 = (-1, 1, 7), \mathbf{v}_5 = (7, 7, 1)$

   (b) $\mathbf{v}_1 = (4, 5, 6), \mathbf{v}_2 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_3 = (1, 2, -1), \mathbf{v}_4 = (3, 0, 1), , \mathbf{v}_5 = (7, 6, 9),$ $\mathbf{v}_6$ =(1,3,1)

   (c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{v}_5 = (0, 1, 2, 3)$

   (d) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (4, 3, 2, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{v}_5 = (7, 6, 5, 4)$

6. Niech U będzie następującą podprzestrzenią w R^3:

   $$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}. \tag{1}$$

   Wykaż, że wektor $(2, 0, -1)$ należy do tej podprzestrzeni. Wyznacz bazę tej podprzestrzeni oraz wyraź ten wektor w tej bazie.

7. Niech $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $\ldots$, $p_n(x) = x^n$ dla $x \in R$ oraz $n \in N_+$. Pokazac, że dla dowolnego n, wektory $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tworzą bazę w przestrzeni wektorowej wielomianów rzeczywistych stopnia n nad ciałem liczb rzeczywistych.