

7 Przekształcenia liniowe

- Niech $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ oraz $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ będą bazami w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$. Wyznaczyć macierz przejścia od bazy B do bazy C, gdy:
 - $\vec{b}_1 = (7, 5), \vec{b}_2 = (3, 1), \vec{c}_1 = (1, -5), \vec{c}_2 = (-1, 1)$.
 - $\vec{b}_1 = (6, 1), \vec{b}_2 = (1, 0), \vec{c}_1 = (2, -1), \vec{c}_2 = (3, -1)$.
 - $\vec{b}_1 = (7, -2), \vec{b}_2 = (2, -1), \vec{c}_1 = (4, 1), \vec{c}_2 = (5, 2)$.
 - $\vec{b}_1 = (-1, 3), \vec{b}_2 = (-1, 2), \vec{c}_1 = (1, 0), \vec{c}_2 = (0, 1)$.
- Sprawdź, czy przekształcenie T jest liniowe:
 - $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2 - x_3, x_1 - 3x_2 + 1)$,
 - $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1x_2, 6x_3)$,
 - $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_1 + x_2^2, x_1 - x_3)$,
 - $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$,
 - $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$,
 - $T(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1, x_2, t, t - x_3)$,
- Wyznacz obraz i jądro przekształcenia liniowego $T: \mathbb{R}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_2[x] : T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + (b + c)x + dx^2$.
- Wyznacz obraz i jądro przekształcenia liniowego $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4 : T_A(x) = Ax$, oraz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Wyznacz bazę obrazu i bazę jądra przekształcenia liniowego T:
 - $T(x, y, z) = (x + y - z, x + 3y - z, -3x - y + z)$. Ponadto, Wyznacz reprezentację macierzową $[T]_E^E$ z bazy elementarnej w bazę elementarną. Wyznacz reprezentację macierzową $[T]_C^B$ z bazy $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ w bazę $C = \{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.
 - $T(x, y, z, t) = (x + y + z, y + 2z, x - z)$ Ponadto, Wyznacz reprezentację macierzową $[T]_E^E$ z bazy elementarnej w bazę elementarną. Wyznacz reprezentację macierzową $[T]_C^B$ z bazy $B = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ w bazę $C = \{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.
- Przekształcenie liniowe jest dane przez $T(x, y, z) = (2x - y - z, x + y, 3x - y - z)$. Wyznacz $[T]_C^B$, gdy $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$, $C = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.
- Przekształcenie liniowe $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_{2 \times 2} : T(\phi(x)) = \begin{pmatrix} \phi(0) & 2\phi'(0) \\ 3\phi''(0) & 0 \end{pmatrix}$, Wyznacz $[T]_C^B$, gdy $B = \{1, x, x^2\}$ i $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$