ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2002
Seria: AUTOMATYKA z. Nr kol.

Łukasz Kuszner
Politechnika Gdańska

ROZPROSZONE KOLOROWANIE GRAFÓW

Streszczenie. W pracy zaprezentowano nowy rozproszony algorytm kolorowania grafów. Przeprowadzone eksperymenty pokazują, że daje on lepsze wyniki niż znany wcześniej algorytm trywialny.

DISTRIBUTED GRAPH COLORING

Summary. In the paper we present a new distributed algorithm for graph coloring. A practical simulation shows that the algorithm performs much better then a naive distributed algorithm.

1. Wstęp

Grafem G nazwiemy parę $G = (V, E)$, w której V jest skończonym zbiorem *wierzchołków*, a E rodziną *krawędzi*. Rodzina E składa się z nieuporządkowanych par $e = \{u, v\} \in E$, gdzie $u, v \in V$. O wierzchołkach u, v takich, że $\{u, v\} \in E$ powiemy, że są *sąsiednie*, a o wierzchołku u i krawędzi $\{u, v\}$, że są *incydentne*. Przez *stopień* wierzchołka v rozumiemy liczbę krawędzi z nim incydentnych i oznaczamy $deg(v)$. Największy stopień wierzchołka w grafie oznaczamy przez Δ.

Przyporządkowanie kolorów, lub elementów innego zbioru, wierzchołkom grafu G nazwiemy *kolorowaniem*, jeśli sąsiednim wierzchołkom przydzielono różne kolory. Kolorowanie przy użyciu k kolorów nazwiemy *k-kolorowaniem*. Jeśli dla grafu istnieje k-kolorowanie, to powiemy, że jest on *k-kolorowalny*, a jeśli dodatkowo nie jest on $(k-1)$-kolorowalny, to powiemy, że jego *liczba chromatyczna* wynosi k, co oznaczamy $\chi(G) = k$. Znanych jest wiele algorytmów kolorowania. Można je znaleźć w popularnych książkach np. w [7].

Przez *graf losowy* $G_{n,p}$ rozumiemy graf o liczbie wierzchołków n, który powstał przez połączenie każdej pary wierzchołków krawędzią z prawdopodobieństwem p; losowania odbywają się w sposób niezależny. W ten sposób otrzymujemy rodzinę grafów nadającą się do testowania heurystycznych algorytmów grafowych. Były one używane między innymi w pracach [5], [9], [10]. Na grafach losowych można też badać zachowanie algorytmów w przypadku średnim.

2. Przyznawanie kodów w sieciach bezprzewodowych.

Zajmiemy się teraz polem możliwych zastosowań dla kolorowania rozproszonego. Weźmy pod uwagę bezprzewodową sieć radiową. Zastosowanie sieci radiowych umożliwia [11]:

- komunikację pomiędzy stacjami będącymi w ruchu;
- wymianę informacji pomiędzy stacjami rozproszonymi na dużym obszarze niezależnie od sieci przewodowych;
- łatwą rozbudowę i rekonfigurację sieci w zależności od potrzeb.

Poszczególne stacje są wyposażone w nadajnik i odbiornik. Głównym zasobem sieci bezprzewodowej jest kanał komunikacyjny. Korzysta z niego wielu użytkowników sieci. Swobodne nadawanie pakietów danych prowadzi do nakładania się ich na siebie i powstawania kolizji. Zaistnienie kolizji powoduje utratę danych i konieczność retransmisji.

Kolizje można podzielić na: *bezpośrednie*, kiedy zakłócające stacje słyszą się lub *ukryte*, kiedy niesłyszące się stacje nadają do tego samego odbiorcy.

Konieczne jest zastosowanie protokołów umożliwiających współdzielenie pasma. W szczególności mamy do dyspozycji protokół wykorzystujący algorytm losowego przydziału zasobów: wielodostęp z podziałem kodowo-adresowym (*Code Division Multiple Access*).

W protokole CDMA możliwe jest wyeliminowanie kolizji dzięki użyciu całego spektrum technik oraz dzięki właściwemu przydziałowi *ortogonalnych kodów*. Zastosowanie kolorowania grafów do przydziału kodów dla protokołu CDMA zostało omówione w [1].

Sieć jest modelowana przez nieskierowany graf $G_{WN} = (V, E)$, w którym zbiór wierzchołków V oznacza stacje nadawczo-odbiorcze, a zbiór krawędzi kanały komunikacyjne pomiędzy parami stacji. Dokładniej dwa wierzchołki u, v są połączone krawędzią

$(u, v) \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im stacje słyszą się wzajemnie. W tym wypadku powiemy o wierzchołkach, że są *fizycznie sąsiednie.* Graf G_{WN} reprezentuje fizyczną topologię sieci. Wystąpienie kolizji bezpośredniej jest możliwe pomiędzy stacjami sąsiednimi w grafie G_{WN}. Kolizja ukryta może wystąpić między stacjami u i v, jeśli długość najkrótszej ścieżki pomiędzy nimi wynosi 2. Stacje u i v unikną kolizji używając różnych kodów. Przyporządkowując kodom kolory mamy problem kolorowania grafu w dwóch wersjach:

- Unikanie ukrytych kolizji

  Kolorowanie grafu $G_H = (V, E_H)$ stowarzyszonego z G_{WN}, w którym $(u, v) \in E_H$, jeśli najkrótsza ścieżka z u do v wynosi 2.

- Unikanie kolizji ukrytych i bezpośrednich

  Kolorowanie grafu $G_{HP} = (V, E_{HP})$ stowarzyszonego z G_{WN}, gdzie $(u, v) \in E_{HP}$, jeśli najkrótsza ścieżka z u do v nie przekracza 2.

W cytowanym wcześniej artykule [1] autorzy proponują do kolorowania tradycyjne algorytmy sekwencyjne. Co jednak w wypadku, gdy stacje przemieszczają się względem siebie i topologia sieci szybko się zmienia, albo jeśli sieć jest bardzo duża i gromadzenie danych o aktualnej konfiguracji nastręcza poważne trudności?

3. Kolorowanie rozproszone

W pracy nie będzie stanowić różnicy, czy wierzchołki grafu oznaczają stacje nadawczo-odbiorcze, czy też inne urządzenia, które potrafią liczyć, zapamiętywać dane i komunikować się z innymi podobnymi jednostkami, w dalszej części będziemy używali słowa *procesor*.

3.1. Model

Wygodnym narzędziem do analizy jest poniższy model systemu wieloprocesorowego.

Sieć procesorów jest reprezentowana przez graf nieskierowany. Wierzchołki grafu odpowiadają procesorom, a krawędzie dwukierunkowym, niezawodnym kanałom komunikacyjnym. Zwykle przez n oznacza się liczbę wierzchołków w grafie, czyli tutaj liczbę procesorów, przez m rozumiemy liczbę krawędzi – tutaj kanałów komunikacyjnych.

Obliczenia wykonywane są w rundach. Każda runda składa się z dwóch faz: fazy obliczeń i fazy komunikacji (wysyłania i odbierania komunikatów).

Przez *złożoność czasową* algorytmu rozumiemy wyłącznie liczbę rund potrzebnych do wykonania zadania. Jest to uzasadnione wysokimi nakładami na przesłanie komunikatu i stosunkowo niskimi na wykonanie obliczeń.

3.2. Oczekiwania

Po kolorowaniu rozproszonym nie należy się zbyt wiele spodziewać w stosunku do zwykłych algorytmów sekwencyjnych. W szczególności nie należy sądzić, że problem niewielomianowy da się rozwiązać wielomianowo w nowym modelu. Wynika to z następującego rozumowania: rozpatrzmy trudny problem niewielomianowy Π rozmiaru n. Gdyby można go było rozwiązać wielomianowo w środowisku rozproszonym na n procesorach, to również można byłoby go rozwiązać wielomianowo na jednym procesorze w czasie n razy dłuższym, czyli również wielomianowym.

Właściwie należy spodziewać się mniej niż po algorytmach równoległych. Proste przeniesienie algorytmów równoległych nie jest możliwe głównie z powodu braku pamięci współdzielonej. Z tego względu również przeniesienie algorytmów sekwencyjnych napotyka na poważne trudności.

4. Algorytm trywialny

Najprostszy algorytm to $(\Delta + 1)$-kolorowanie wierzchołkowe (*trivial algorithm*) [2], gdzie Δ jest największym stopniem wierzchołka w grafie. Takie pokolorowanie oczywiście istnieje, co wynika z następującego algorytmu sekwencyjnego: każdemu kolejnemu wierzchołkowi przypisz najmniejszy kolor nie przypisany jeszcze żadnemu sąsiadowi.

W wersji rozproszonej algorytmu każdy wierzchołek u przechowuje paletę barw nie przypisanych jeszcze przez żadnego z sąsiadów – inicjalnie rozmiaru $deg\,(u) + 1$. Każdy wierzchołek losuje kolor ze swojej palety i wysyła komunikat do swoich sąsiadów. Jeśli żaden z nich nie wybrał tej barwy, u jest pokolorowany i informuje o tym swoich sąsiadów.

Jeśli jakiś sąsiad wylosował taki sam kolor, u nie zatrzymuje go. Na początku następnej rundy u usuwa ze swojej palety kolory użyte przez jego sąsiadów.

Johansson w [3] wykazał, że w algorytmie trywialnym każdy wierzchołek w każdej rundzie otrzyma kolor z prawdopodobieństwem $p \geq 1/4$. Stąd, wykorzystując wynik Karp'a [6] można wykazać, że algorytm skończy się prawie zawsze po $O(\log n)$ rundach. Bardziej precyzyjnie: czas wykonania $T(n)$ dla n wierzchołkowego grafu dla każdego dodatniego t:

$$\Pr\Big\{T(n) \geq \lfloor \log_{4/3} n \rfloor + t + 1\Big\} \quad \leq \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{t-1} \tag{1}$$

Podobny algorytm został podany przez Luby'ego w [8]. W tym algorytmie wierzchołki nie podejmują próby kolorowania w każdej rundzie. Na początku rundy w każdym wierzchołku odbywa się losowanie, próba kolorowania zostaje podejęta tylko z pewnym prawdopodobieństwem p.

5. Algorytm DLF

Opisany wcześniej algorytm trywialny ma istotną wadę, a mianowicie nie ma żadnego mechanizmu oszczędzania kolorów. Z tego względu zaproponujemy teraz inny rozproszony algorytm, który jest pod tym względem dużo lepszy.

Jak wiemy z analiz opłaca się najpierw kolorować wierzchołki o większym stopniu. Wykorzystują to sekwencyjne algorytmy: *largest-first*(LF), *smallest-last*(SL), czy *saturation largest-first*(SLF). Spróbujmy zastosować tę obserwację w kolorowaniu rozproszonym.

Zakładamy model opisany we wstępie. Każdy wierzchołek zna porządek kolorów, listę swoich sąsiadów i potrafi wygenerować losową liczbę. Nie ma żadnych dodatkowych założeń o grafie, ani o jego liczbie chromatycznej.

Algorytm przebiega w rundach. W każdej rundzie są dwie fazy komunikacji. Pomiędzy nimi wierzchołki wykonują obliczenia.

Każdy wierzchołek v posiada trzy parametry:

- swój stopień: $deg(v)$,
- losowy parametr: $rndvalue(v)$,

- inicjalnie pustą paletę zabronionych kolorów, które zostały już zużyte przez jego sąsiadów: $usedcolors(v)$.

Parametry $deg(v)$ i $rndvalue(v)$ decydują o kolejności kolorowania.

Niech v_1, v_2 będą wierzchołkami grafu. Mówimy, że v_1 ma *wyższy priorytet* niż v_2, jeśli:

$$deg(v_1) > deg(v_2)$$

lub

$$(deg(v_1) = deg(v_2)) \quad \wedge \quad (rndvalue(v_1) > rndvalue(v_2))$$

Pojedyncza runda dla każdego niepokolorowanego wierzchołka przebiega w pięciu krokach:

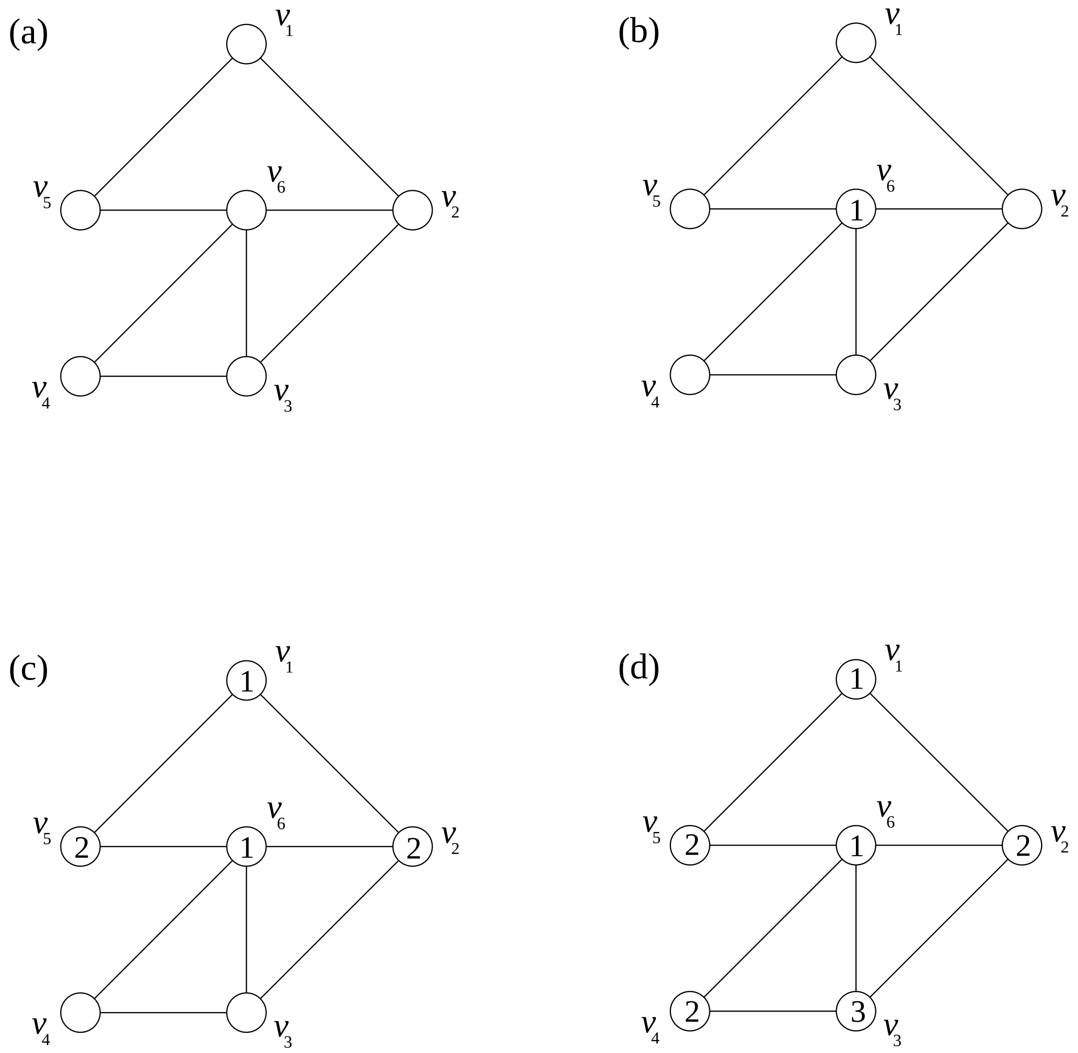
- Wylosuj parametr $rndvalue(v)$.
- Wyślij wszystkim sąsiadom swoje parametry: $deg(v)$, $rndvalue(v)$ i pierwszy kolor, którego nie ma na twojej liście $usedcolors$.
- Porównaj swoje parametry z otrzymanymi od sąsiadów i sprawdź, czy masz najwyższy priorytet spośród tych, którzy chcą otrzymać ten sam kolor.
- Jeśli tak: przydziel sobie kolor, poinformuj o tym sąsiadów i zakończ.
- Jeśli nie: zaktualizuj swoją listę $usedcolors$.

5.1. Przykład działania

Działanie algorytmu prześledzimy na przykładzie grafu znajdującego się na rysunku 1(a).

Największy stopień – 4 ma wierzchołek v_6. Zostanie on pomalowany w pierwszej kolejności. Równocześnie mógłby otrzymać kolor wierzchołek v_1 (tylko v_1 nie jest połączony z v_6), ale jego sąsiad v_2 ma większy stopień. Sytuacja po pierwszej rundzie jest przedstawiona na rysunku 1(b).

Teraz v_1 jako jedyny ma jeszcze wolny kolor o numerze 1, bez przeszkód otrzyma go w rundzie drugiej. Pierwszym wolnym kolorem dla pozostałych wierzchołków (poza v_6, który już otrzymał kolor) jest barwa o numerze 2. Występują konflikty pomiędzy v_2 i v_3



Rys. 1. Przykład kolorowania algorytmem DLF

Fig. 1 Example of coloring with the DLF algorithm.

oraz v_3 i v_4. Wierzchołek v_4 musi przegrać, gdyż $deg(v_4) < deg(v_3)$. Natomiast stopnie wierzchołków v_2 i v_3 są równe, w tym wypadku decyduje losowy parametr *rndvalue*. Jak widzimy na rysunku 1(c), więcej szczęścia miał v_2 i ten właśnie wierzchołek został pomalowany.

Pozostały wierzchołki v_3 i v_4. Nie ma pomiędzy nimi konfliktu, gdyż v_4 ma jeszcze wolny kolor o numerze 2, a v_3 już nie. Konieczne jest użycie kolejnej barwy.

Na rysunku 1(d) widzimy ostateczny przydział barw po trzeciej rundzie działania algorytmu. W tym wypadku otrzymaliśmy optymalne pokolorowanie. Co najmniej trzy barwy musiały być użyte, bo graf zawiera trójkąty: v_3, v_4, v_6 oraz v_2, v_3, v_6.

5.2. Analiza

Fakt 1. *W każdej rundzie prawie zawsze co najmniej jeden wierzchołek zostanie pokolorowany*

Dowód: Żaden wierzchołek nie otrzyma koloru tylko w sytuacji, gdy nie ma wierzchołka o lokalnie najwyższym priorytecie, czyli sąsiednie wierzchołki maksymalne mają równy priorytet. Można jednak tak dobrać rozdzielczość parametru $rndvalue(v)$, aby prawdopodobieństwo tego zdarzenia było znikome. W dalszej części analizy przyjęte będzie założenie, że tak właśnie jest. □

Fakt 2. *Algorytm DLF nigdy nie użyje więcej niż* $\Delta + 1$ *kolorów.*

Dowód: Weźmy pod uwagę dowolny, niepokolorowany jeszcze wierzchołek u w tej rundzie działania algorytmu, w której ma otrzymać kolor. W najgorszym wypadku wszyscy jego sąsiedzi są już pokolorowani na różne kolory. Wtedy u otrzymałby kolor o numerze $deg(u) + 1 \leq \Delta + 1$. □

Fakt 3. *W każdej kolejnej rundzie, w całym grafie, zostanie przydzielony co najwyżej jeden nowy kolor.*

Dowód: Przypuśćmy, że w poprzedniej rundzie kolorem o najwyższym numerze był kolor k. Wtedy sąsiedzi wierzchołków pokolorowanych kolorem k być może użyją koloru $k + 1$. Żaden inny nowy kolor nie zostanie użyty. □

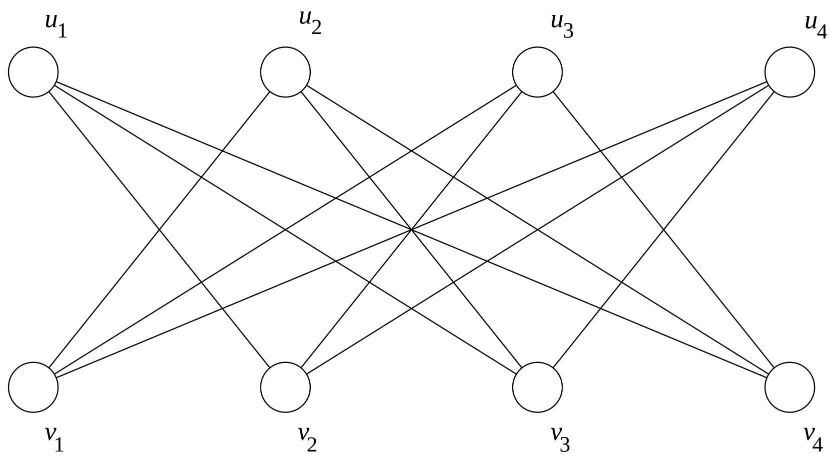
5.3. Liczba użytych barw

Może się zdażyć, że algorytm DLF, tak jak w poprzednim przykładzie, da optymalne pokolorowanie. Nie jest to jednak regułą. Johnson w [4] podał rodzinę grafów $J_1, J_2, \ldots, J_k, \ldots$, dla których algorytm sekwencyjny LF działa bardzo słabo. Graf J_k jest grafem dwudzielnym z wierzchołkami: $u_1, u_2, \ldots, u_k$ i $v_1, v_2, \ldots, v_k$ oraz wszystkimi krawędziami $\{u_i, v_j\}$ dla $i \neq j$. Przykładowy graf Johnson'a znajduje się na rysunku 2. Niestety może się zdarzyć, że algorytm DLF użyje k kolorów do pokolorowania dwudzielnego grafu J_k. Będzie tak na przykład wtedy, gdy w czasie i-tej rundy wierzchołki u_i

n	$trivial$	DLF	LF
10	6,2	4,02	4,04
20	11,6	6,33	6,35
30	16,9	8,38	8,32
50	27,0	12,01	11,95
70	37,2	15,24	15,18
100	52,2	19,85	19,79
120	61,8	22,82	22,75
150	78,3	27,08	26,98
170	86,9	29,71	29,78
200	101,3	33,72	33,73

Tablica 1. Porównanie średniej liczby kolorów dla grafów losowych $G_{n,1/2}$

oraz v_i, mając wyższy priorytet niż pozostałe, otrzymają kolor i. Stąd funkcja dobroci algorytmu jest $\Theta(n)$.



Rys. 2. Graf Johnson'a J_4.

Fig. 2 Johnson's graph J_4.

Lepiej przedstawia się sytuacja dla średniej liczby kolorów. Przeprowadzone eksperymenty w przestrzeni grafów losowych wskazują, że jest ona podobna jak dla sekwencyjnego algorytmu LF. Odpowiednie zestawienie wyników znajduje się w tabeli 1.

5.4. *Szybkość*

Weźmy pod uwagę graf pełny K_n. Do pokolorowania tego grafu potrzeba n kolorów. To oznacza, że do pokolorowania grafu K_n potrzeba n rund (patrz fakt 3.).

Z powyższego widać, że nie możemy oczekiwać logarytmicznego czasu działania w każdym wypadku. Jednak w przypadku grafów regularnych możemy sformułować co następuje:

Fakt 4. *Algorytm DLF prawie zawsze działa w czasie $O(\log n)$ rund na grafach regularnych.*

Dowód: Niech G będzie grafem d-regularnym, a v niepokolorowanym wierzchołkiem na początku pewnej rundy k. Przypuśćmy, że v dla parametru *rndvalue* wylosował wartość x. Prawdopodobieństwo $Pr(v)$, że v otrzyma kolor w czasie tej rundy zależy od x oraz $UN(v)$ – liczby niepokolorowanych sąsiadów v. Możemy zapisać $Pr(v) = x^{UN(v)} > x^d$. Sumując po wszystkich x mamy:

$$Pr(v) = \int_0^1 x^d \mathrm{d}x = \frac{1}{d+1} x^{d+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{d+1}.$$

Korzystając z twierdzenia 1.1 z pracy [6] otrzymujemy:

$$Pr[T(n) \geq \lfloor \log_{\frac{d+1}{d}}(n) \rfloor + t + 1] \ \leq \ \left(\frac{d}{d+1}\right)^{t-1}. \ \square$$

6. Warianty kolorowania

Algorytm DLF może być łatwo dostosowany do innych modeli kolorowania wierzchołkowego.

6.1. *T-kolorowanie*

Mając T – zbiór liczb nieujemnych, T-kolorowaniem grafu G nazywamy przyporządkowanie liczb dodatnich $c(v)$ każdemu wierzchołkowi v z G w taki sposób, że jeśli $\{u, v\} \in E$, to $|c(u) - c(v)| \notin T$ [7].

W algorytmie DLF dla T-kolorowania każdy wierzchołek v zna T, a lista *usedcolors* zawiera wszystkie kolory zabronione dla v uwzględniając T i kolory wybrane przez sąsiadów.

Na przykład, jeśli $T = \{0, 2\}$, a wierzchołek v ma dwóch sąsiadów pokolorowanych kolorami 1 i 3 odpowiednio, to lista *usedcolors* dla v zawiera kolory $\{1, 3, 5\}$.

6.2. Multikolorowanie

Dla grafu G (f, k)-kolorowaniem, $1 \leq f \leq k$, nazwiemy takie przyporządkowanie f barw ze zbioru k każdemu wierzchołkowi v, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają ani jednego wspólnego koloru.

Modyfikacja algorytmu DLF polega na tym, że każdy wierzchołek zna f i kończy działanie dopiero po znalezieniu wszystkich potrzebnych barw.

Podziękowania

Autor chciałby wyrazić wdzięczność profesorowi Markowi Kubale oraz Adamowi Nadolskiemu za cenne uwagi i okazaną pomoc.

LITERATURA

1. Battiti R., Bertossi A. A., Bonuccelli M. A.: Assigning codes in wireless networks, Wireless Networks 5 1999, pp. 195-209.
2. Grable D. A., Panconesi A.: Fast distributed algorithms for Brooks-Vizing colourings, 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Francisco), ACM, New York, 1998, pp. 473-480.
3. Johansson Ö., Simple distributed $\Delta+1$ – coloring of graphs, Information Processing Letters 70, 1999, pp. 229-232.
4. Johnson D. S.: Worst case behavior of graph algorithms, Proc. 5-th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1974, pp. 513-527.
5. Johri A., Matula D. W.: Probabilistic bounds and heuristic algorithms for coloring large random graphs, Raport 75275, Department of Computer Science and Engineering Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1982.
6. Karp R. M.: Probabilistic recurence relations, Journal of ACM 41 1994, pp. 1136-1150.
7. Kubale M.: Introduction to Computational Complexity and Algorithmic Graph Coloring, GTN, Gdańsk, 1998.
8. Luby M.: Removing randomness in parallel without processor penalty, Journal of Computer and System Sciences 47 1993, pp. 250-286.
9. Marathe M., Panconesi A., Risinger L.: An experimental study of a simple, distributed edge coloring algorithm, Raport, Los Alamos National Labolatory, 1999.

10. Shamir E., Upfal E.: Sequential and distributed graph coloring algorithms with performance analysis in random graph spaces, Journal of Algorithms 5 1984, pp. 488-501.
11. Woźniak J., Nowicki K.: Sieci LAN, MAN i WAN - protokoły komunikacyjne, Wydawnicwto Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków, 1998.

Recenzent:

Wpłynęło do Redakcji do xx.yy.2000 r.

Abstract

We discuss the vertex coloring problem in a distributed network. Such a network consists of processors and bidirectional communication links between pairs of them. It can be modeled by a graph $G = (V, E)$. Set V denotes processors and E models links between them. To color the vertices of a graph G means to give each vertex a color in such a way that no two adjacent vertices get the same color. If at most k colors are used, the result is called a k-coloring.

We assume that there is no shared memory. Each processor knows its own links and its unique identifier. We want these units to compute a coloring of the associated graph without any other information about the structure of G. We will assume that the system is synchronized in *rounds*. The number of rounds will be our measure of efficiency.

Such a model of coloring can be used in a distributed multihop wireless networks to eliminate packet collisions by assigning orthogonal codes to radio stations [1].

In the paper we present a new distributed algorithm for graph coloring. A practical simulation shows that the algorithm performs much better then a naive distributed algorithm.