$$\rho = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \rho^{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \frac{1}{4} \\ & \boxed{\frac{1}{4}} & 0 & \\ & 0 & \boxed{\frac{1}{4}} & \\ \frac{1}{4} & & & 0 \end{bmatrix}$$

jeśli $\rho^{\Gamma} \geq 0$ to stan ρ jest separowalny

jeśli $\rho^{\Gamma} \ngeq 0$ to ρ jest splątany.

no problem ≥ 0

$\rho^{\Gamma} \geq \iff$ ma wszyst. wart. własne ≥ 0

rozpatrz: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = A$

$\begin{bmatrix} a & c \\ c^* & b \end{bmatrix}$

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4|c|^2 + 4ab}}{2}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4\cdot 0}}{2}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{16} < 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{16}}}{2} + = \frac{\frac{1}{2} \pm 0}{2}$$

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & c \\ c^* & b-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - |c|^2 = ab - a\lambda - b\lambda - |c|^2 + \lambda^2$$

$$= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - |c|^2$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - |c|^2)$$

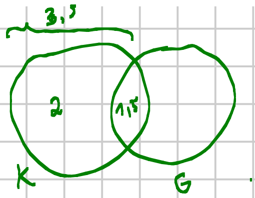
$$\lambda_{\pm} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4|c|^2}}{2}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0 + 4\cdot\frac{1}{16}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$\boxed{\lambda_- < 0}$ stan jest splątany

Zadanie 10.3. *Posługując się diagramem Venna odpowiedz. Stan pogody w Krakowie pod warunkiem znajomości pogody w Gdańsku da się opisać w dwóch bitach. Wiedząc, że stan pogody w Krakowie wymaga 3,5 bitów zapisu, podaj wielkość korelacji pogody w Krakowie i Gdańsku.*



$H(K) = 3{,}5$

$H(K|G) = 2$

$I(K:G) = H(K) - H(K|G) = 1{,}5$

Zadanie 10.4. *Dla podanego stanu podaj jego entropię von Neumanna, jego podukładów, oraz wzajemną informację* $I(A:B)$, *jak również entropię warunkową* $S(A|B)$.

$$a)\ |\psi_+\rangle,\quad b)\ |\phi_-\rangle,\quad c)\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\quad d)\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$\rho_A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \rho_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$I(A:B)_\rho = S(A)_\rho + S(B)_\rho - S(AB)_\rho$$

wart. wł.

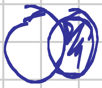
$$= H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}) + H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}) - H(\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to \frac{1}{3},\ 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab + 4|c|^2}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{(\frac{2}{3})^2 - 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\cancel{\frac{4}{9}} - \cancel{\frac{4}{9}} + \frac{4}{9}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}}{2} = \begin{cases} \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \\ 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0$$



$$I(A:B)_\rho = H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}) + \cancel{H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\})} - \cancel{H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0\})}$$

$$= H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}) = \frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} \quad \checkmark$$

$$S(A|B) = S(AB) - S(B) = H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0\}) - H(\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\}) = 0$$

UWAGA PR

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{bmatrix}$$

jest niesygnalizujący

i poprawny

(w ćw. 7.4 było typo : S zamiast NS)

Zadanie 8.5. *Dopełnij podane stany mieszane do stanu czystego.*

V a) $\rho_A = \frac{1}{3}\left|+\right\rangle\left\langle+\right| + \frac{2}{3}\left|-\right\rangle\left\langle-\right|$,

V b) $\rho_A = \frac{1}{4}\left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \frac{3}{4}\left|1\right\rangle\left\langle1\right|$,

c) $\rho_A = \frac{1}{2}\left|+_i\right\rangle\left\langle+_i\right| + \frac{1}{2}\left|-_i\right\rangle\left\langle-_i\right|$,

d) $\rho_{AB} = \frac{1}{3}\left|\psi_+\right\rangle\left\langle\psi_+\right| + \frac{2}{3}\left|\varphi_-\right\rangle\left\langle\varphi_-\right|$,

V e) $\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left|\psi_-\right\rangle\left\langle\psi_-\right| + \frac{1}{4}\left|\varphi_+\right\rangle\left\langle\varphi_+\right| + \frac{1}{2}\left|\varphi_-\right\rangle\left\langle\varphi_-\right|$.

w domu.

$|\psi\rangle \perp |\varphi\rangle$

$\rho_A = |\psi\rangle\langle\psi| + |\varphi\rangle\langle\varphi|$

a) $\rho_A \to \psi_{AB}$

prostopadły

$$|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|+\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|-\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

← stan t. że po wyśladowaniu B, dostajemy ρ_A

$tr_B\,|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| = \rho_A$.

b) $$|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}\,|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{3}{4}}\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

e) $$|\psi_{ABE}\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}\,|\psi_-\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}\,|\varphi_+\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\varphi_-\rangle \otimes |2\rangle$$

Zadanie 8.6. *Dla stanów trójukładowych podaj stan w jakim znajduje się układ AB, gdy na układzie E po pomiarze w bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ otrzymany zostanie stan:*

a) $|0\rangle_E$, $|\psi\rangle_{ABE} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E + |\psi_+\rangle_{AB} \otimes |1\rangle_E\right)$

b) $|1\rangle_E$, $|\psi\rangle_{ABE} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11\rangle_{AB} \otimes |1\rangle_E + |\varphi_-\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E + |00\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E\right)$

c) $|0\rangle_E$, $|\psi\rangle_{ABE} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11\rangle_{AB} \otimes |1\rangle_E + |\varphi_-\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E + |00\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_E\right)$, ✓ (2)

podaj także prawdopodobieństwo tego zdarzenia.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,|00\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_+\rangle \otimes |1\rangle$

z $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ prawdopodobieństwem. $\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $|11\rangle$ z pstwem $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$

segregujemy (wyciągamy $|0\rangle_E$ przed nawias)

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11\rangle|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\varphi_-\rangle + |00\rangle\right) \otimes |0\rangle_E$

1) wyciągamy $|0\rangle$ przed nawias =

$\frac{1}{\sqrt{3}}\,1.|11\rangle|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\varphi_-\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|00\rangle|0\rangle =$

$\frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underbrace{|\varphi_-\rangle + |00\rangle}_{=\psi}\right)|0\rangle$

2) normuję

$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{2}$

$\sqrt{\left(\langle\varphi_-| + \langle 00|\right)\left(|\varphi_-\rangle + |00\rangle\right)} = \sqrt{\langle\varphi_-|\varphi_-\rangle + \langle 00|00\rangle}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 01 + 10|00\rangle = 0$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

unormowane

chcielibyśmy: mnożymy przez normę ψ:

$\frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|\psi\rangle|0\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\tilde{\psi}\rangle|0\rangle}_{\text{czyli stan}}$

Odp: $\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \frac{2}{3}$ – pstwo wypadnięcia $|0\rangle$

w tym samym momencie A i B mają stan $|\tilde{\psi}\rangle$.