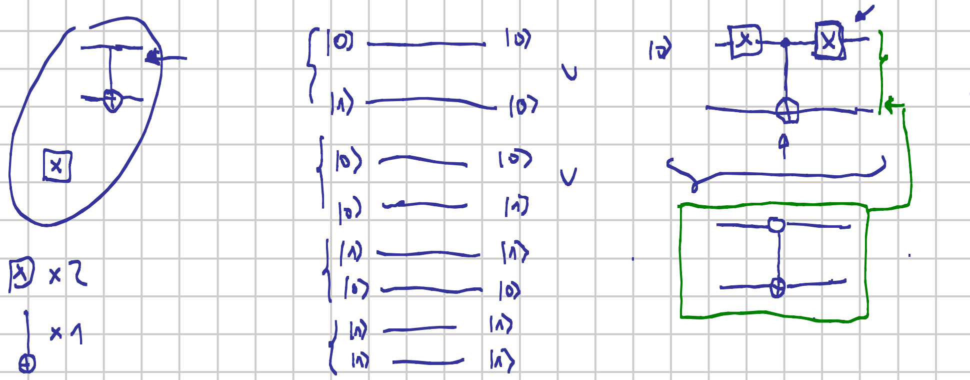
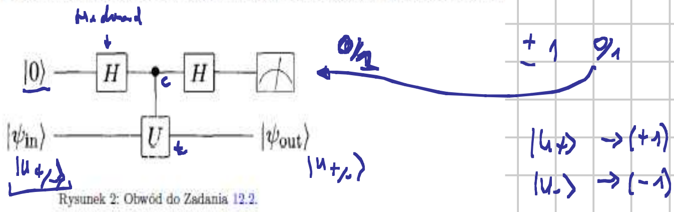
Zadanie 12.1. *Przedstaw obwód który wykonuje bramkę CNOT$_0$ w taki sposób, że stan docelowy zmienia się, gdy stan kontrolny jest równy 0 a nie 1 jak w bramce CNOT, zaś kontrolny kubit pozostawał niezmieniony.*



Zadanie 12.2. *Załóżmy, że U ma dwie wartości własne ±1. Chcemy wykonać pomiar którego wynikiem będzie odpowiednia wartość własna, gdy na jego wejściu pojawi się stan własny transformacji unitarnej. Sprawdź, że poniższy obwód wykonuje ten pomiar:*



Rysunek 2: Obwód do Zadania 12.2.

$|u_+\rangle \to (+1)$

$|u_-\rangle \to (-1)$

$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$\boxed{X}$ – w bazie obliczeniowej

control-U $\quad |0\rangle_c \to$ nie rób nic na t

$\quad |1\rangle_c \to$ wykonaj U na t $\quad U = \underbrace{(+1)}_{}|u_+\rangle\langle u_+| - |u_-\rangle\langle u_-|$

przykład: CNOT:

(1) $|0\rangle_c |u_+\rangle_t \xrightarrow{H\otimes I} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c\right)|u_+\rangle_t \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|u_+\rangle + (+1)|1\rangle|u_+\rangle\right) \xrightarrow{H}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|u_+\rangle + |-\rangle|u_+\rangle\right) = \boxed{\frac{2|0\rangle}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|u_+\rangle = \boxed{|0\rangle|u_+\rangle} \to \boxed{0}\,|0\rangle$

(3) $(|+\rangle + |-\rangle)|u_+\rangle = \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|u_+\rangle$

(4) $|0\rangle_c |u_-\rangle_t \xrightarrow{H\otimes I} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_c\right)|u_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_c|u_-\rangle_t + |1\rangle_c U|u_-\rangle_t\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_c|u_-\rangle_t + (-1)|1\rangle_c|u_-\rangle_t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_c|u_-\rangle - |-\rangle|u_-\rangle\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_c - |-\rangle_c\right)|u_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|u_-\rangle =$

$\frac{1}{2}\cdot 2|1\rangle|u_-\rangle = \boxed{|1\rangle|u_-\rangle}$

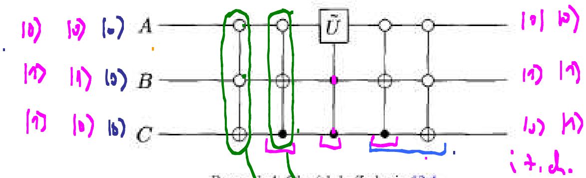
Zadanie 12.5. *Napisz listę wektorów tworzących kod Graya dla wektorów s = 0001001 oraz t = 1100011.*

zmieniamy bity od prawej strony

s	0101	0101
t	1100	0100
		1100

0001011
0000011
0100011
1100011

Zadanie 12.4. *Sprawdź działanie poniższego obwodu na stanach* $|ijk\rangle$, *gdzie* $\tilde{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:



Rysunek 4: Obwód do Zadania 12.4.

$CC_{11}\tilde{U}$

$$\begin{bmatrix} a & & & b \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ c & & & d \end{bmatrix} \checkmark$$

$|000\rangle_{ABC} + |111\rangle_{ABC}$

$|000\rangle \to CNOT_{A_0 B_0 C} |000\rangle \to |001\rangle \to CNOT_{A_0, BC_1} |001\rangle_{ABC} = |011\rangle_{ABC}$

$CC_{11}\tilde{U}\, |011\rangle \to \tilde{U}|0\rangle_A |11\rangle_{BC} \overset{?}{=} (a|0\rangle + c|1\rangle)|11\rangle = CNOT_{A_0 BC_1} |\psi\rangle =$

$CNOT_{A_0 BC_1} (a|0\rangle|11\rangle + c|111\rangle) = a|001\rangle + c|111\rangle \to CNOT_{A_0 B_0 C}\ a|000\rangle + c|111\rangle$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$|111\rangle \to CNOT_{A_0 B_0 C} \to |111\rangle \to CNOT_{A_0 BC_1} |111\rangle \to (\tilde{U}|1\rangle)|11\rangle \to$
$(b|0\rangle + d|1\rangle)|11\rangle \to CNOT_{A_0 BC_1}$

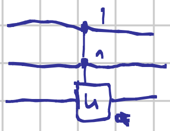
$CNOT_{A_0 BC_1} (b|011\rangle + d|111\rangle) = b|001\rangle + d|111\rangle \to CNOT_{A_0 B_0 C}\ b|001\rangle + d|111\rangle =$

$b|000\rangle + d|111\rangle$

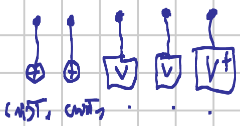
$|000\rangle + |111\rangle \to (a+b)|000\rangle + (d+c)|111\rangle$

Zadanie 12.7. *Z dwóch CNOTów, dwóch bramek kontrol-V oraz jednej kontrol-*$V^\dagger$ *takich że* $V^2 = U$, *gdzie* U *jest pewną jednokubitową transformacją, zbuduj obwód który wykonuje* U *na trzecim kubicie pod warunkiem, że pierwsze dwa są ustawione na* $|1\rangle$, *i nic nie robi w przeciwnym wypadku.*

cel:

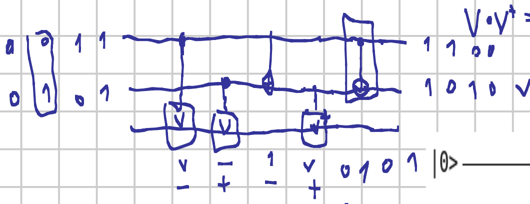


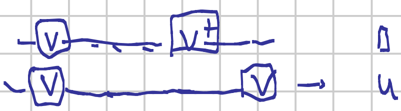
mamy do dyspozycji:

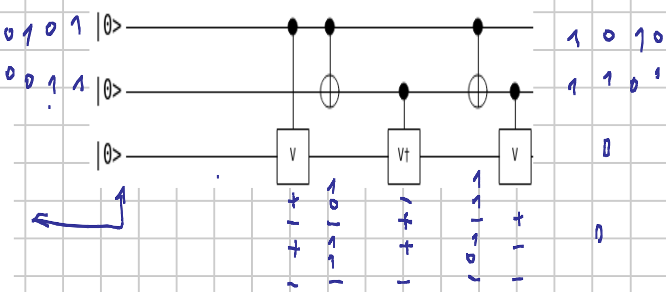


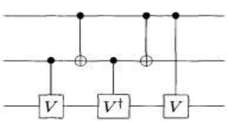
$V \cdot V = U$

$V \cdot V^\dagger = \mathbb{1}$



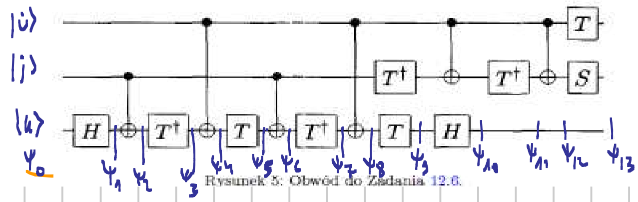






Rysunek 6: Obwód do Zadania 12.7

Zadanie 12.6. *Sprawdź działanie obwodu na wektorach bazy obliczeniowej* $\{|000\rangle, \dots, |111\rangle\}$, *przedstawiając stany pośrednie algorytmu.*



Rysunek 5: Obwód do Zadania 12.6.

$$\overset{\psi_0}{|i\rangle|j\rangle|k\rangle} \to 1\otimes 1 \otimes H\,|ijk\rangle = |i\rangle|j\rangle\underline{\left(|0\rangle + (-1)^k|1\rangle\right)} = \psi_1 \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to |i\rangle|j\rangle\left(|j\oplus 0\rangle + (-1)^k|j\oplus 1\rangle\right) = \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix}$$

$$\psi_2 = |i\rangle|j\rangle\left(\underbrace{|j\rangle + (-1)^k|j\oplus 1\rangle}\right) \qquad H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\psi_3 = |i\rangle|j\rangle\left(\underbrace{\left(e^{-i\pi/4}\right)^j}_{\text{dla } j=0 \ 1}\underbrace{|j\rangle} + (-1)^k\underbrace{\left(e^{-i\pi/4}\right)^{j\oplus 1}}_{j=0 \ e^{-i\pi/4}}\underbrace{|j\oplus 1\rangle}\right)$$

$$(\mathrm{NOT}\ |i\rangle|j\rangle = |i\rangle|i\oplus j\rangle$$

$$T^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}$$