

Szeregowanie zadań

Wykład nr 2

dr Hanna Furmańczyk

26-02-2020

Złożoność problemów szeregowania zadań

Problemy:

- wielomianowe
- NP-trudne
- otwarte

Złożoność problemów szeregowania zadań

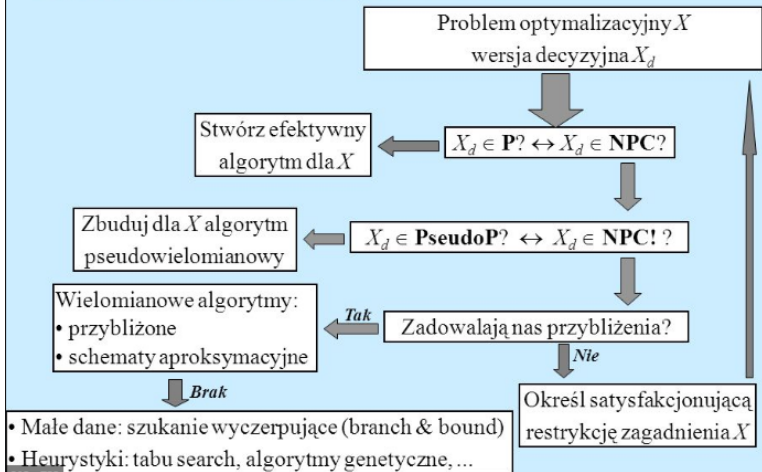
Problemy:

- wielomianowe
- NP-trudne
- otwarte

Jak sobie radzić z NP-trudnością?

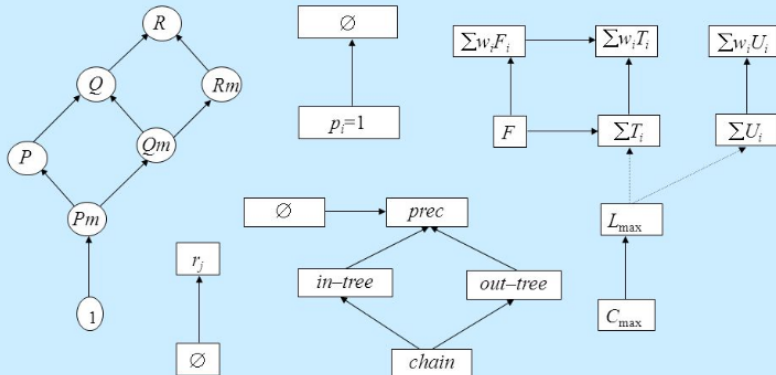
- wielomianowe algorytmy przybliżone o gwarantowanej dokładności względnej,
- dokładne algorytmy pseudowielomianowe,
- algorytmy dokładne, szybkie tylko w średnim przypadku,
- heurystyki wyszukujące (np. tabu search, algorytmy genetyczne),
- dla małych rozmiarów danych - wykładnicze przeszukiwanie wyczerpujące (np. branch-and-bound - alg. podziału i ograniczeń).

Ogólny schemat analizy zagadnienia



Redukcje podproblemów do problemów ogólniejszych

Przykłady.



Relacja zależności kolejnościowych w zbiorze zadań

- przeciwzwrotna $\forall Z_i \neg Z_i \prec Z_i$
- przechodnia $\forall Z_i, Z_j, Z_k (Z_i \prec Z_j \wedge Z_j \prec Z_k) \Rightarrow Z_i \prec Z_k$

Relacja zależności kolejnościowych w zbiorze zadań

- przeciwzwrotna $\forall Z_i \neg Z_i \prec Z_i$
- przechodnia $\forall Z_i, Z_j, Z_k (Z_i \prec Z_j \wedge Z_j \prec Z_k) \Rightarrow Z_i \prec Z_k$

Metody reprezentacji relacji

Sieć AN (activity on node)

- wierzchołki odpowiadają operacjom, ich wagi (liczby naturalne) są równe czasom wykonywania,
- $Z_i \prec Z_j \Leftrightarrow$ w sieci istnieje ścieżka skierowana z wierzchołka Z_i do wierzchołka Z_j ,
- zwykle usuwa się łuki przechodnie (jak w diagramie Hassego).

Sieć AN (activity on node)

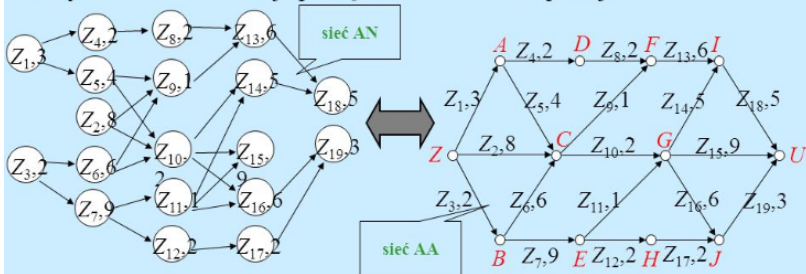
- wierzchołki odpowiadają operacjom, ich wagi (liczby naturalne) są równe czasom wykonywania,
- $Z_i \prec Z_j \Leftrightarrow$ w sieci istnieje ścieżka skierowana z wierzchołka Z_i do wierzchołka Z_j ,
- zwykle usuwa się łuki przechodnie (jak w diagramie Hassego).

Sieć AA (activity on arc)

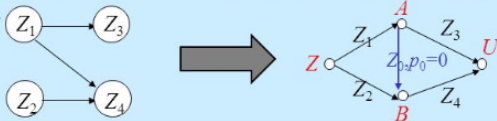
- łuki odpowiadają operacjom, ich długości są równe czasom wykonywania,
- przez każdy wierzchołek przechodzi droga z Z (źródło) do U (ujście),
- $Z_i \prec Z_j \Leftrightarrow$ łuk Z_i kończy się w początku łuku Z_j , lub też w sieci istnieje ścieżka skierowana z końca łuku Z_i do początku Z_j ,
- można wprowadzać operacje pozorne – łuki o zerowej długości.

Metody reprezentacji relacji \prec za pomocą *digrafu acyklicznego*.

Przykład. Ta sama relacja porządku dla zbioru 19 operacji.



Przykład. Przy translacji AN \rightarrow AA niekiedy trzeba wprowadzić (zerowe) operacje pozorne.



Metoda ścieżki krytycznej

Zasada: dla każdej operacji określamy najwcześniejszy możliwy moment uruchomienia tj. maksymalną "długość ścieżki doń prowadzącej.

Metoda ścieżki krytycznej

Zasada: dla każdej operacji określamy najwcześniejszy możliwy moment uruchomienia tj. maksymalną "długość ścieżki doń prowadzącej.

Algorytm dla AN

- 1 numeruj wierzchołki „topologicznie” (brak łuków „pod prąd”)
- 2 wierzchołkom Z_a bez poprzedników nadaj etykietę $l(Z_a) = 0$, a kolejnym wierzchołkom Z_i przypisuj
$$l(Z_i) = \max\{l(Z_j) + p_j : \text{istnieje łuk z } Z_j \text{ do } Z_i\},$$

Wynik: $l(Z_i)$ jest najwcześniejszym możliwym terminem rozpoczęcia Z_i .

Algorytm dla AA

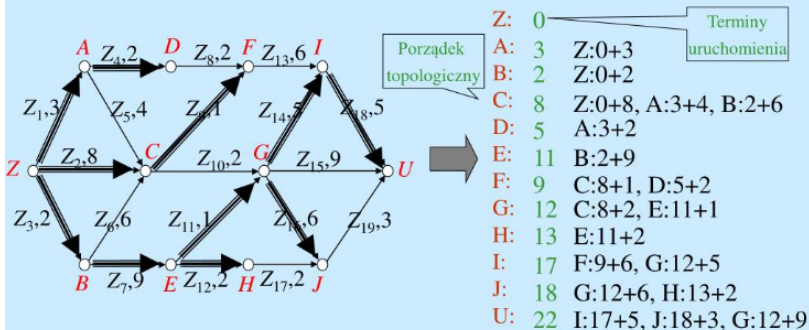
- 1 numeruj wierzchołki „topologicznie” (brak łuków „pod prąd”)
- 2 źródłu Z nadaj etykietę $I(Z) = 0$, a kolejnym wierzchołkom v przypisuj $I(v) = \max\{I(u) + p_j : \text{łuk } Z_j \text{ prowadzi z } u \text{ do } v\}$,

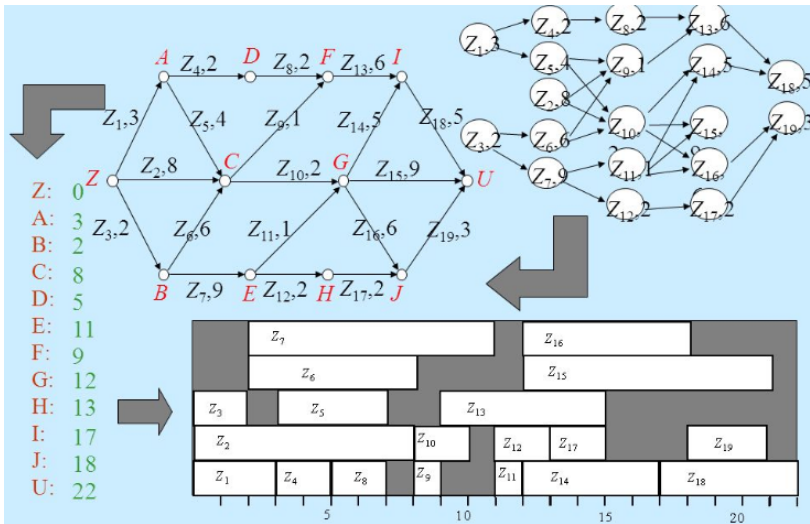
Wynik: $I(v)$ wierzchołka początkowego Z_j jest najwcześniejszym możliwym terminem rozpoczęcia tej operacji. $I(U)$ to termin zakończenia harmonogramu.

Metoda ścieżki krytycznej.

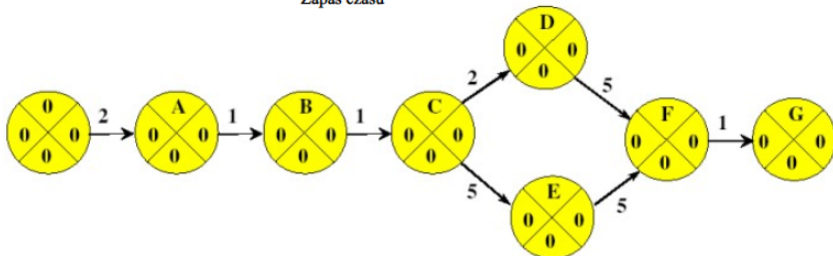
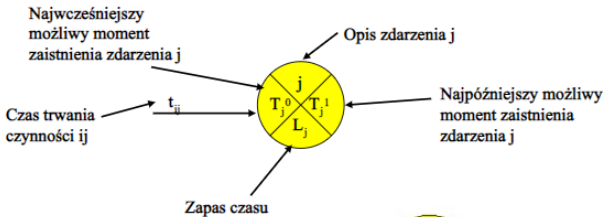
Model $\text{--}|\text{pre}|\text{C}_{\max}$ operacji o różnych czasach wykonania, z zależnościami kolejnościowymi, ale nie wymagających procesorów. Celem jest znalezienie najkrótszego możliwego harmonogramu.

Przykład. Harmonogram dla sieci AA złożonej z 19 operacji.

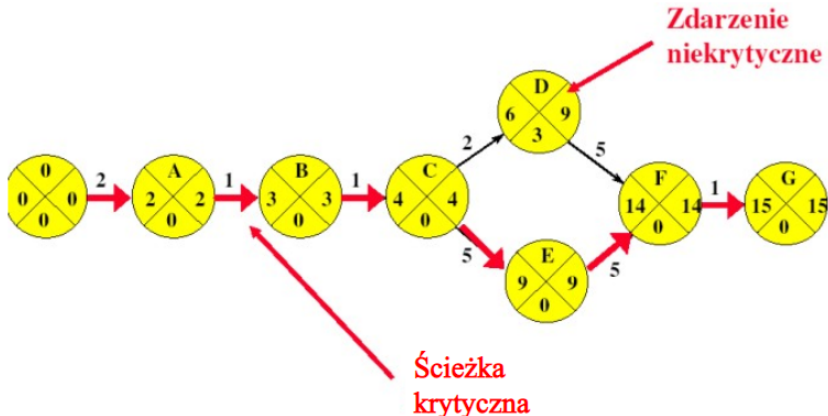




Tworzenie sieci CPM:



Zdarzenia niekrytyczne i ścieżka krytyczna



$$2+1+1+2+5+1=12$$

$$2+1+1+5+5+1=15$$

- Algorytmy ścieżki krytycznej minimalizują nie tylko C_{\max} , ale wszystkie zdefiniowane wcześniej funkcje kryterialne.
- Możemy wprowadzić do modelu różne wartości terminów przybycia r_j dla zadań Z_j – dodając "sztuczne" zadania (o długości r_j):
 - jako wierzchołki – poprzednicy w modelu AN
 - jako łuk prowadzący ze źródła Z do początku łuku Z_j w modelu AA.