Matematyka dyskretna - wykład nr 1: Indukcja i rekurencja; Arytmetyka komputerowa

Hanna Furmańczyk; hanna@inf.ug.edu.pl

15.10.2016

Wymiar godzinowy zajęć - studia zaoczne

- studia licencjackie: 16h wykładu, 16h ćwiczeń
- studia inżynierskie: 16h wykładu, 16h ćwiczeń

Literatura

1. A. Szepietowski, Matematyka dyskretna, Wydawnictwo UG 2004.
2. skrypt do przedmiotu (fragmenty) - dostępny na portalu edukacyjnym
3. K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, Matematyka dyskretna, Wydawnictwo Naukowe PWN 1999.

Indukcja matematyczna - metoda dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych

Zasada indukcji

Jeżeli istnieje taka liczba naturalna n_0, że:

1. $T(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,
2. dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$,

to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Przykład

Udowodnij metodą indukcji matematycznej prawdziwość wzoru dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

1. Sprawdzamy prawdzowiść wzoru (1) dla $n_0 = 1$
   Lewa strona (1): L=1
   Prawa strona (1): P=$\frac{1(1+1)}{2} = 1$
   L=P, a zatem wzór (1) jest prawdziwy dla $n_0 = 1$
2. Założenie indukcyjne
   Zakładamy prawdziwość wzoru (1) dla pewnego n, czyli że:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dla pewnego n

Przykład

Udowodnij metodą indukcji matematycznej prawdziwość wzoru dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

1. Sprawdzamy prawdzowiść wzoru (1) dla $n_0 = 1$
   Lewa strona (1): L=1
   Prawa strona (1): P=$\frac{1(1+1)}{2} = 1$
   L=P, a zatem wzór (1) jest prawdziwy dla $n_0 = 1$
2. Założenie indukcyjne
   Zakładamy prawdziwość wzoru (1) dla pewnego n, czyli że:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dla pewnego n

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n+1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L=1+2+\cdots+(n+1)=1+2+\cdots+n+(n+1)=$$

$$=\underbrace{1+2+\cdots+n}_{zal.ind.}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n+1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L=1+2+\cdots+(n+1)=1+2+\cdots+n+(n+1)=$$

$$=\underbrace{1+2+\cdots+n}_{zal.ind.}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n+1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L=1+2+\cdots+(n+1)=1+2+\cdots+n+(n+1)=$$

$$=\underbrace{1+2+\cdots+n}_{zal.ind.}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n+1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L=1+2+\cdots+(n+1)=1+2+\cdots+n+(n+1)=$$

$$=\underbrace{1+2+\cdots+n}_{zal.ind.}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n+1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) =$$

$$= \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{zal.ind.} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

3. Dowodzimy prawdziwość wzoru (1) dla $n + 1$:
Chcemy udowodnić, że zachodzi wzór:

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \tag{2}$$

Lewa strona (2):

$$L = 1 + 2 + \cdots + (n + 1) = 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) =$$

$$= \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{zal.ind.} + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \textit{Prawa strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$. $\square$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \textit{Prawa strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$.

$\square$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \textit{Prawa strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$.

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \textit{Prawa strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$.

□

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \mathit{Prawa\ strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$. $\square$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \textit{Prawa strona}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla każdego $n \geq 1$.

□

Przykład 2

Udowodnij metodą indukcji matematycznej prawdziwość nierówności dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 5$

$$2^n \geq n^2 \tag{3}$$

1. Sprawdzamy prawdzowiść nierówności (3) dla $n_0 = 5$
   Lewa strona (1): L=$2^5 = 32$
   Prawa strona (1): P=$5^2 = 25$
   $L \geq P$, a zatem nierówność (3) jest prawdziwa dla $n_0 = 5$
2. Założenie indukcyjne
   Zakładamy prawdziwość (3) dla pewnego n, czyli że:

$$2^n \geq n^2$$

dla pewnego n

Przykład 2

Udowodnij metodą indukcji matematycznej prawdziwość nierówności dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 5$

$$2^n \geq n^2 \tag{3}$$

1. Sprawdzamy prawdzowiść nierówności (3) dla $n_0 = 5$
   Lewa strona (1): L=$2^5 = 32$
   Prawa strona (1): P=$5^2 = 25$
   $L \geq P$, a zatem nierówność (3) jest prawdziwa dla $n_0 = 5$
2. Założenie indukcyjne
   Zakładamy prawdziwość (3) dla pewnego n, czyli że:

$$2^n \geq n^2$$

<u>dla pewnego n</u>

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2 * 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2*2^n = 2^n+2^n \underbrace{\geq}_{\textit{dwukrotnie zal. ind.}} n^2+n^2 \geq n^2+2n+1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2 * 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2*2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2 * 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2*2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2 * 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

3. Dowodzimy prawdziwość nierówności (3) dla $n+1$:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

$$L = 2^{n+1} = 2 * 2^n = 2^n + 2^n \underbrace{\geq}_{dwukrotnie\ zal.\ ind.} n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

$$L \geq (n+1)^2$$

skrypt - strony 111–115

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 1 \quad 1 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System dziesiętny; baza systemu: 10; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$$178_{(10)} = 1 * 100 + 7 * 10 + 8 * 11 * 10^2 + 7 * 10^1 + 8 * 10^0$$

System dwójkowy; baza systemu: 2; dozwolone cyfry: $\{0, 1\}$

$$100111_{(2)} = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 32 = 39_{(10)}$$

System szesnastkowy; baza systemu: 16; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

$$\$ABC = 12 * 16^0 + 11 * 16^1 + 10 * 16^2 = 12 + 176 + 2560 = 2748_{(10)}$$

Arytmetyka komputerowa

System szesnastkowy; baza systemu: 16; dozwolone cyfry: $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

$$\$ABC = 12 * 16^0 + 11 * 16^1 + 10 * 16^2 = 12 + 176 + 2560 = 2748_{(10)}$$

Zamiana cd.

"10" $\rightarrow$ "2"

	iloraz	*reszta*
178 : 2	89	0
89 : 2	44	1
44 : 2	22	0
22 : 2	11	0
11 : 2	5	1
5 : 2	2	1
2 : 2	1	0
1 : 2	0	1

$\uparrow$

$$178_{(10)} = 10110010_{(2)}$$

Zamiana cd.

"10" $\rightarrow$ "2"

	iloraz	*reszta*
178 : 2	89	0
89 : 2	44	1
44 : 2	22	0
22 : 2	11	0
11 : 2	5	1
5 : 2	2	1
2 : 2	1	0
1 : 2	0	1

$\uparrow$

$$178_{(10)} = 10110010_{(2)}$$

Zamiana systemów $'2' \leftrightarrow' 16'$

'10'	'16'	'2'
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

$$11|0010|1101_{(2)} = \$32D$$

$$\$A13 = 1010|0001|0011_{(2)}$$

Zamiana systemów '2' ↔ '16'

'10'	'16'	'2'
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

$$11|0010|1101_{(2)} = \$32D$$

$$\$A13 = 1010|0001|0011_{(2)}$$

Zamiana systemów $'2' \leftrightarrow' 16'$

$'10'$	$'16'$	$'2'$
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

$$11|0010|1101_{(2)} = \$32D$$

$$\$A13 = 1010|0001|0011_{(2)}$$

Zamiana systemów $'2' \leftrightarrow' 16'$

$'10'$	$'16'$	$'2'$
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

$$11|0010|1101_{(2)} = \$32D$$

$$\$A13 = 1010|0001|0011_{(2)}$$

Zamiana systemów $'2' \leftrightarrow' 16'$

$'10'$	$'16'$	$'2'$
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

$$11|0010|1101_{(2)} = \$32D$$

$$\$A13 = 1010|0001|0011_{(2)}$$

- dodawanie
- odejmowanie

Skrypt - strony 12–13

Reprezentacja liczb w komputerze

Skrypt - strony 18–20

Przeszukiwanie binarne

Skrypt - strony 20–21

Dziękuję za uwagę