Algorytmiczna teoria grafów

dr Hanna Furmańczyk

18 maja 2013

Problem

Wyobraźmy sobie, że mamy m dziewczyn i pewną liczbę chłopców. Każda dziewczyna chce wyjść za mąż, przy czym każda z nich godzi się poślubić tylko pewnych chłopców spośród wszystkich. Chłopcy natomiast nie mają nic do gadania. Jeśli jakaś go chce, to bierze on ją bez zastanowienia. Kiedy uda się tak dobrać mężów, aby każda dziewczyna poślubiła dokładnie jednego i, oczywiście, każda innego?

Problem

Wyobraźmy sobie, że mamy m dziewczyn i pewną liczbę chłopców. Każda dziewczyna chce wyjść za mąż, przy czym każda z nich godzi się poślubić tylko pewnych chłopców spośród wszystkich. Chłopcy natomiast nie mają nic do gadania. Jeśli jakaś go chce, to bierze on ją bez zastanowienia. Kiedy uda się tak dobrać mężów, aby każda dziewczyna poślubiła dokładnie jednego i, oczywiście, każda innego?

Rysunek

Problem

Wyobraźmy sobie, że mamy m dziewczyn i pewną liczbę chłopców. Każda dziewczyna chce wyjść za mąż, przy czym każda z nich godzi się poślubić tylko pewnych chłopców spośród wszystkich. Chłopcy natomiast nie mają nic do gadania. Jeśli jakaś go chce, to bierze on ją bez zastanowienia. Kiedy uda się tak dobrać mężów, aby każda dziewczyna poślubiła dokładnie jednego i, oczywiście, każda innego?

Rysunek

Warunek konieczny

Dowolne k dziewcząt, $1 \leq k \leq m$ musi godzić się łącznie poślubić co najmniej k chłopców.

Problem

Wyobraźmy sobie, że mamy m dziewczyn i pewną liczbę chłopców. Każda dziewczyna chce wyjść za mąż, przy czym każda z nich godzi się poślubić tylko pewnych chłopców spośród wszystkich. Chłopcy natomiast nie mają nic do gadania. Jeśli jakaś go chce, to bierze on ją bez zastanowienia. Kiedy uda się tak dobrać mężów, aby każda dziewczyna poślubiła dokładnie jednego i, oczywiście, każda innego?

Rysunek

Warunek konieczny i wystarczajacy

Dowolne k dziewcząt, $1 \leq k \leq m$ musi godzić się łącznie poślubić co najmniej k chłopców.

Twierdzenie Halla, 1935

Problem kojarzenia małżeństw z m dziewczynami ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek kojarzenia małżeństw

> *każde k dziewczyn, $1 \leq k \leq m$, zna łącznie nie mniej niż k chłopców.*

Twierdzenie Halla, 1935

Problem kojarzenia małżeństw z m dziewczynami ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek kojarzenia małżeństw

> *każde k dziewczyn, $1 \leq k \leq m$, zna łącznie nie mniej niż k chłopców.*

Dowód indukcyjny względem m.

Twierdzenie Halla, 1935

Problem kojarzenia małżeństw z m dziewczynami ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek kojarzenia małżeństw

> *każde k dziewczyn, $1 \leq k \leq m$, zna łącznie nie mniej niż k chłopców.*

Dowód indukcyjny względem m.

Przykłady

Inne sformułowania

Hall, wersja grafowa

W grafie dwudzielnym $G(V, W; E)$ istnieje skojarzenie z V do W wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|A| \leq |N(A)|,$$

dla każdego podzbioru A zbioru V, gdzie $N(A)$ oznacza sąsiedztwo zbioru A.

Załóżmy, że mamy rodzinę niepustych podzbiorów $F = \{S_1, \ldots, S_m\}$ pewnego ustalonego zbioru X (S_i to zbiór chłopców, których godzi się wziąć za męża i-ta dziewczyna). Rodzina F ma transwersalę, gdy istnieje m-elementowy podzbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zbioru X taki, że $x_i \in S_i$ (czyli po ludzku, gdy dla każdej dziewczyny można wybrać innego męża.)

Załóżmy, że mamy rodzinę niepustych podzbiorów $F = \{S_1, \dots, S_m\}$ pewnego ustalonego zbioru X (S_i to zbiór chłopców, których godzi się wziąć za męża i-ta dziewczyna). Rodzina F ma transwersalę, gdy istnieje m-elementowy podzbiór $\{x_1, \dots, x_n\}$ zbioru X taki, że $x_i \in S_i$ (czyli po ludzku, gdy dla każdej dziewczyny można wybrać innego męża.)

Hall, wersja traswersalowa

Rodzina $F = \{S_1, \dots, S_m\}$ niepustych podzbiorów zbioru X ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru indeksów $I \subset \{1, \dots, m\}$ $|I| \leq |\bigcup_{i \in I} S_i|$.

Załóżmy, że mamy rodzinę niepustych podzbiorów $F = \{S_1, \ldots, S_m\}$ pewnego ustalonego zbioru X (S_i to zbiór chłopców, których godzi się wziąć za męża i-ta dziewczyna). Rodzina F ma transwersalę, gdy istnieje m-elementowy podzbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zbioru X taki, że $x_i \in S_i$ (czyli po ludzku, gdy dla każdej dziewczyny można wybrać innego męża.)

Hall, wersja traswersalowa

Rodzina $F = \{S_1, \ldots, S_m\}$ niepustych podzbiorów zbioru X ma transwersalę wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru indeksów $I \subset \{1, \ldots, m\}$ $|I| \leq |\bigcup_{i \in I} S_i|$.

Przykład

Zastosowania twierdzenia Halla

- kwadraty łacińskie

Zastosowania twierdzenia Halla

- kwadraty łacińskie
- problem Haremu