KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SKRYPT Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

Matematyka dyskretna dla studentów kierunku Informatyka

Hanna Furmańczyk

Karol Horodecki

Paweł Żyliński

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SKRYPT Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

Hanna Furmańczyk, Karol Horodecki

Paweł Żyliński

Matematyka dyskretna

dla studentów

kierunku

Informatyka

Dziękujemy wszystkim Studentom, których cenne sugestie i spostrzeżenia pozwoliły nam na ulepszenie zawartości skryptu i wyeliminowanie błędów. Dziękujemy także Autorom, z których materiałów skorzystaliśmy, a na przestrzeni tych kilku lat zdążyliśmy już o tym zapomnieć.

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
Gdańsk 2010

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skład komputerowy (LaTeX): Paweł Żyliński

ISBN 978-83-7326-708-4

Recenzent:
Projekt okładki i strony tytułowej: Anna Białk – Bielińska

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Armii Krajowej 119/121.
81-824 Sopot, tel./fax (058) 523-11-37

Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Instytut Informatyki
80-952 Gdańsk, ul. Wita Stwosza 57

Zestaw zadań nr 9

Elementy teorii grafów

Graf nieskierowany $G = (V, E)$ jest to para składająca się z niepustego skończonego zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi E, gdzie krawędzie to nieuporządkowane pary wierzchołków:

$$E \subseteq \{\{u, v\} \quad | \quad u, v \in V\}.$$

Graf *prosty* to taki graf, dla którego:

(1) jeśli $\{u, v\} \in E$, to $u \neq v$ (brak *pętli*);
(2) co najwyżej tylko jedna para $\{u, v\} \in E$ (brak *multikrawędzi*).

Dwa wierzchołki u i v są *sąsiednie*, jeśli krawędź $e = \{u, v\} \in E$. Mówimy wówczas, że wierzchołki u, v są *incydentne* z tą krawędzią. Podobnie dwie różne krawędzie są *sąsiednie*, jeśli mają przynajmniej jeden wspólny wierzchołek. *Stopień wierzchołka* v jest liczbą krawędzi z nim incydentnych (ozn. $\deg(v)$). Wierzchołek stopnia 1 nazywany jest *liściem*, a wierzchołek stopnia 0 — *wierzchołkiem izolowanym*. Ciąg liczb $c = (d_1, d_2, ..., d_n)$ nazywamy ciągiem *grafowym*, jeśli istnieje graf G o n wierzchołkach, których stopnie równe są odpowiednim wyrazom ciągu c. W dalszej części skrypu poprzez „graf” w domyśle rozumiemy „graf prosty”, w przeciwnym wypadku wyraźnie mówimy „multigraf”.

Fakt 9.1 *Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym multigrafem. Wówczas $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.*

Zauważmy, że z powyższego faktu wynika, że suma stopni w dowolnym multigrafie $G = (V, E)$ jest liczbą parzystą, a w szczególności, że liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Zadanie 9.2. Narysuj grafy o następujących ciągach stopni:

a) $(4, 3, 2, 2, 1)$.
b) $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

Zadanie 9.3. Wykaż (np. przez odpowiedni rysunek), że:

a) dla dowolnego parzystego $n \geq 4$ istnieje n-wierzchołkowy graf, których wszystkie stopnie wynoszą 3;

b) dla dowolnego nieparzystego $n \geq 5$ istnieje graf o $n + 1$ wierzchołkach, spośród których dokładnie n jest stopnia 3;

c) dla dowolnego $n \geq 5$ istnieje graf o n wierzchołkach, których wszystkie stopnie wynoszą 4.

Twierdzenie 9.4 (Havel 1955, Hakimi 1962)
Niech $c = (s, t_1, \ldots, t_s, d_1, d_2, ..., d_k)$ *będzie nierosnącym ciągiem liczb. Wówczas ciąg stopni* c *jest ciągiem grafowym wtedy i tylko wtedy gdy ciąg stopni* $(t_1-1, \ldots, t_s-1, d_1, d_2, ..., d_k)$ *jest grafowym.*

Przykład 9.5. Które z następujących ciągów są grafowe?

a) $(5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$.
b) $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że w przypadku (a) liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest nieparzysta, a zatem suma stopni jest nieparzysta i w konsekwencji otrzymujemy, że dany ciąg nie jest ciągiem grafowym.

W przypadku (b) warunek konieczny — suma stopni ma być parzysta — jest spełniony:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 26.$$

Skorzystajmy zatem z twierdzenia 9.4. Otrzymujemy:

$$(\underline{6}, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(5-1, 4-1, 3-1, 2-1, 2-1, 2-1, 2) = (4, 3, 2, 1, 1, 1, 2) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\underline{4}, 3, 2, 2, 1, 1, 1) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(3-1, 2-1, 2-1, 1-1, 1, 1) = (2, 1, 1, 0, 1, 1) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\underline{2}, 1, 1, 1, 1, 0) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(1-1, 1-1, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 1, 0) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\underline{1}, 1, 0, 0, 0) \text{ jest ciągiem grafowym}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(1-1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \text{ jest ciągiem grafowym.}$$

Jako że graf o czterech wierzchołkach i bez krawędzi ma ciąg stopni równy $(0, 0, 0, 0)$, ciąg $(0, 0, 0, 0)$ jest ciągiem grafowym, a zatem na mocy twierdzenia 9.4 ciąg $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$ jest także ciągiem grafowym.

Zauważmy, że już dla ciągu $(1, 1, 0, 0, 0)$ widać, że ciąg ten jest ciągiem grafowym — graf o pięciu wierzchołkach, z których dowolne ustalone dwa wierzchołki połączone są krawędzią, ma ciąg stopni równy $(1, 1, 0, 0, 0)$ — a zatem już na tym etapie możemy skorzystać z twierdzenia 9.4. ♯

Przykład 9.6. Narysuj graf (prosty) o ciągu stopni $(6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$.

Rozwiązanie. W poprzednim zadaniu, w oparciu o twierdzenie 9.4, wykazaliśmy, że rzeczywiście taki graf istnieje. Okazuje się, że dowód ten może być użyty do konstrukcji szukanego grafu.

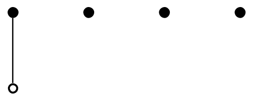
- Krok 1. Otrzymaliśmy, że ciąg $(0,0,0,0)$ jest ciągiem grafowym. Niech G_1 będzie grafem o ciągu $(0,0,0,0)$, a dokładnie, niech G_1 będzie 4-wierzchołkowym grafem o wszystkich stopniach równych zero. Z poprzednich rozważań zachodzi

$$(0,0,0,0) = (1-1,0,0,0) \text{ jest ciągiem grafowym}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\underline{1},1,0,0,0) \text{ jest ciągiem grafowym.}$$

Zatem do grafu G_1 dodajemy jeden wierzchołek, który łączymy krawędzią z wybranym wierzchołkiem stopnia 0, otrzymując tym samym graf G_2 o ciągu stopni $(1,1,0,0,0)$.



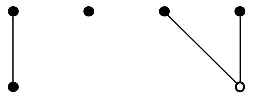
- Z poprzednich rozważań zachodzi

$$(0,0,1,1,0) = (1-1,1-1,1,1,0) \text{ jest ciągiem grafowym}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\underline{2},1,1,1,1,0) \text{ jest ciągiem grafowym.}$$

Zatem do grafu G_2 dodajemy jeden wierzchołek, który łączymy krawędziami z dwoma wybranymi wierzchołkami stopnia stopnia 0, otrzymując tym samym graf G_3 o ciągu stopni $(2,1,1,1,1,0)$.



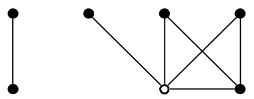
- Z poprzednich rozważań zachodzi

$$(2,1,1,0,1,1) = (3-1,2-1,2-1,1-1,1,1) \text{ jest ciągiem grafowym}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\underline{4},3,2,2,1,1,1) \text{ jest ciągiem grafowym.}$$

Zatem do grafu G_3 dodajemy jeden wierzchołek, który łączymy krawędziami z dwoma wybranymi wierzchołkami stopnia stopnia 1, oraz z wierzchołkiem stopnia 2 i 0, otrzymując tym samym graf G_4 o ciągu stopni $(4,3,2,2,1,1,1)$.



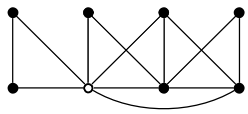
- Z poprzednich rozważań zachodzi

$$(4,3,2,1,1,1,2) = (5-1,4-1,3-1,2-1,2-1,2-1,2) \text{ jest ciągiem grafowym}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\underline{6},5,4,3,2,2,2,2) \text{ jest ciągiem grafowym.}$$

Zatem do grafu G_4 dodajemy jeden wierzchołek, który łączymy krawędziami z trzema wierzchołkami stopnia stopnia 1, z wierzchołkiem stopnia 2, 3 oraz 4, otrzymując tym samym szukany graf (prosty) G_5 o ciągu stopni $(6,5,4,3,2,2,2,2)$.



♯

Zadanie 9.7. Które z następujących ciągów są grafowe?

a) $(4,4,4,4,3,3)$.
b) $(7,6,5,4,4,3,2,1)$.
c) $(6,6,5,5,2,2,2,2)$.
d) $(6,6,5,5,3,3,3,3)$.

Dla ciągów, które są grafowe, narysuj odpowiednie grafy (proste).

Zadanie 9.8. Wykaż indukcyjnie, że istnieje graf o ciągu stopni $(n,n,n-1,n-1,\ldots,2,2,1,1)$.

Zadanie 9.9. Niech G będzie grafem (prostym) o co najmniej dwóch wierzchołkach. Wykaż, że G zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia. Czy jest to prawda dla multigrafów?

Wskazówka. Skorzystać z zasady szufladkowej Dirichleta.

Przykład 9.10. Przyjmując, że G jest grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach wykaż indukcyjnie, że $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Dla jakich grafów zachodzi równość?

Rozwiązanie. Dowód indukcyjny.

(1) $n = 1$. Wówczas graf G jest jednym wierzchołkiem i jako graf prosty ma $0 = \frac{1(1-1)}{2}$ krawędzi.

(2) Załóżmy, że dowolny graf prosty o $1 \leq n' < n$ wierzchołkach ma co najwyżej $\frac{n'(n'-1)}{2}$ krawędzi.

(3) Niech G będzie dowolnym grafem o $n \geq 2$ wierzchołkach. Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem G. Usuńmy ten wierzchołek z G wraz z incydentnymi do niego krawędziami. Otrzymany graf G' ma $n' = n-1$ wierzchołków i, z założenia indukcyjnego, co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi. Usunięty wierzchołek v w grafie G był sąsiedni z co najwyżej $n-1$ wierzchołkami z grafu G', zatem łączna liczba krawędzi w grafie G nie przekracza $\frac{(n-1)((n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

Równość $m = \frac{n(n-1)}{2}$ zachodzi dla grafów pełnych. ♯

Zadanie 9.11. Niech $k \geq 0$. Ustal, dla jakich wartości n istnieje chociaż jeden n-wierzchołkowy graf prosty posiadający dokładnie:

a) k wierzchołków izolowanych;
b) k wierzchołków wiszących (liści).

Zadanie 9.12. Jaka jest maksymalna i minimalna liczba krawędzi w n-wierzchołkowym grafie prostym posiadającym dokładnie:

a) k wierzchołków izolowanych;
b) k wierzchołków wiszących (liści).

9.1 Drogi i cykle

Niech dany będzie dowolny multigraf $G = (V, E)$. *Marszrutą* w G nazywamy skończony ciąg krawędzi postaci $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_k{-}1, v_k\}$; każda marszruta jednoznacznie wyznacza pewien ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Liczbę krawędzi w marszrucie nazywamy jej *długością*. Marszrutę, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy *łańcuchem*. Jeśli ponadto wszystkie wierzchołki są różne (za wyjątkiem ewentualnie $v_0 = v_k$), to łańcuch nazywamy *drogą* (prostą) lub *ścieżką*. Łańcuch bądź droga są *zamknięte*, gdy $v_0 = v_k$. Drogę prostą, zamkniętą i zawierającą przynajmniej jedną krawędź nazywamy *cyklem*. Multigraf $G = (V, E)$ jest *spójny*, jeżeli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v \in V$ istnieje ścieżka łącząca je.

Zadanie 9.13. Znajdź/narysuj graf o pięciu wierzchołkach, który:

a) posiada jeden cykl;
b) posiada trzy cykle;
c) posiada pięć cykli.

Zadanie 9.14. Uzasadnij, że jeżeli każdy z dwóch różnych cykli grafu G zawiera krawędź e, to w G istnieje cykl, który nie zawiera krawędzi e.

Podgrafem multigrafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolny multigraf $H = (V', E')$ taki, że $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$. Podgrafem *indukowanym* przez podzbiór wierzchołków $V' \subseteq V$ multigrafu $G = (V, E)$ nazywamy taki podgraf $H = (V', E')$ multigrafu G, że każda krawędź $e \in E$, której obydwa końce należą do V', należy do E' (i żadna inna, z definicji podgrafu).

Zadanie 9.15.

a) Znajdź/narysuj graf o sześciu wierzchołkach i siedmiu krawędziach, który nie posiada podgrafu będącego cyklem długości 4 (ozn. C_4).

b) Znajdź/narysuj graf o sześciu wierzchołkach i dwunastu krawędziach, który nie posiada podgrafu będącego *grafem pełnym* o czterech wierzchołkach (ozn. K_4).

9.2 Izomorfizm grafów

Dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są *izomorficzne*, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość $h : V_1 \to V_2$ pomiędzy wierzchołkami G_1 i wierzchołkami G_2 taka, że

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(u), h(v)\} \in E_2.$$

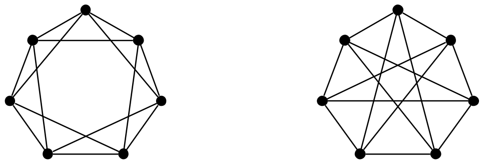
Twierdzenie 9.16 *Jeżeli dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są izomorficzne, to:*

(1) *G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków: $|V_1| = |V_2|$.*
(2) *G_1 i G_2 mają tyle samo krawędzi: $|E_1| = |E_2|$.*
(3) *dla dowolnego k multigrafy G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków stopnia k.*

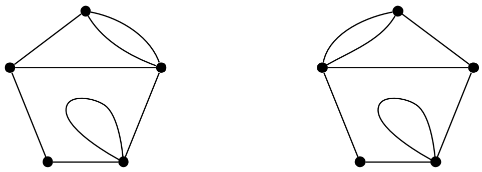
Zadanie 9.17. Narysuj wszystkie grafy ze zbiorem wierzchołków $V = \{a, b, c\}$. Które z nich są izomorficzne? Następnie narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy o czterech wierzchołkach.

Zadanie 9.18. Narysuj dwa najmniejsze (w sensie liczby wierzchołków i krawędzi) nieizomorficzne grafy o takiej samej liczbie wierzchołków i krawędzi.

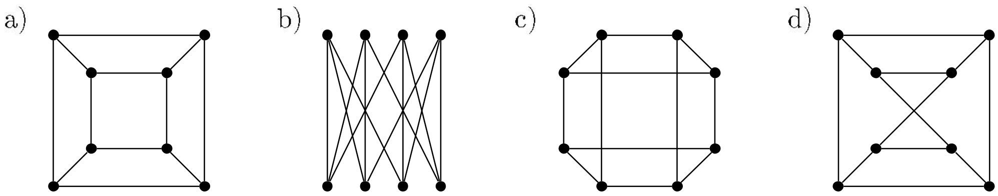
Zadanie 9.19. Wykaż, że poniższe grafy są izomorficzne.



Zadanie 9.20. Wykaż, że poniższe multigrafy nie są izomorficzne.



Zadanie 9.21. Które z poniższych grafów (b)-(d) nie są izomorficzne z grafem (a)? Uzasadnij odpowiedź.



Zadanie 9.22. Istnieją tylko dwa nieizomorficzne grafy o ciągu stopni $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 6)$. Wskaż je.

Niech G będzie grafem prostym ze zbiorem wierzchołków V. *Dopełnienie* $\overline{G}$ grafu G jest grafem prostym z tym samym zbiorem wierzchołków V, w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w G. Graf prosty, który jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem nazywamy *samodopełniającym*.

Zadanie 9.23. Wykaż, że liczba wierzchołków grafu samodopełniającego wynosi $4k$ lub $4k + 1$.

9.3 Drzewa

Twierdzenie 9.24 *Niech T będzie grafem o n wierzchołkach. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest drzewem.*
(2) *T nie zawiera cykli i ma $n-1$ krawędzi.*
(3) *T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.*
(4) *T jest spójny, ale usunięcie dowolnej krawędzi e rozspaja T (każda krawędź jest* mostem*).*
(5) *Dowolne dwa wierzchołki grafu T połączone są dokładnie jedną drogą.*
(6) *T nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.*

Zadanie 9.25. Znajdź/narysuj dwa nieizomorficzne drzewa o tym samym ciągu grafowym.

Przykład 9.26. Wykaż, że dowolne drzewo $T = (V, E)$, $|V| \geq 2$, posiada przynajmniej 2 liście.

Rozwiązanie. Załóżmy, że w drzewie istnieje co najwyżej jeden liść, a zatem wszystkie wierzchołki za wyjątkiem co najwyżej jednego są stopnia przynajmniej dwa. Tym samym zachodzi

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2(|V| - 1) + 1 = 2|V| - 1.$$

Ale z drugiej strony, korzystając z zależności $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ oraz faktu, że w drzewie zachodzi $|E| = |V| - 1$, otrzymujemy $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|V| - 2$ — sprzeczność. $\sharp$

Zadanie 9.27. Niech T będzie drzewem, którego wierzchołki są wyłącznie stopnia 3 lub 1. Jeśli T ma dziesięć wierzchołków stopnia 3, to ile wówczas ma liści?

Zadanie 9.28. W drzewie T średnia stopni wierzchołków jest równa 1.99. Ile krawędzi ma T?

Zadanie 9.29. Wykaż, że jeśli T jest drzewem, w którym wszystkie stopnie wierzchołków są nieparzyste, wówczas liczba krawędzi drzewa T jest również nieparzysta.

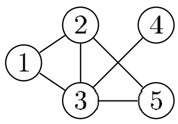
Drzewo spinające (*rozpinające*) multigrafu $G = (V, E)$ to dowolne drzewo $T = (V, E')$ takie, że $E' \subseteq E$. Zauważmy, że T ma taki sam zbiór wierzchołków co G, i każde drzewo spinające multigrafu G jest jego podgrafem. Można wykazać, że każdy spójny multigraf posiada drzewo spinające. W literaturze występują dwa szczególne drzewa spinające — są to drzewa przeszukiwań DFS i BFS, które omówione zostaną w następnej sekcji, natomiast poniżej przedstawiony jest inny prosty algorytm wyznaczania drzewa spinającego.

Algorytm konstrukcji drzewa spinającego.

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym (multi)grafem.

1. Dopóki (multi)graf nie jest drzewem, usuń dowolną krawędź dowolnego cyklu.

Przykład 9.30. Zastosuj powyższy algorytm i wyznacz drzewo spinajacego poniższego grafu.



Rozwiązanie. Zgodnie z algorytmem, wykonujemy:

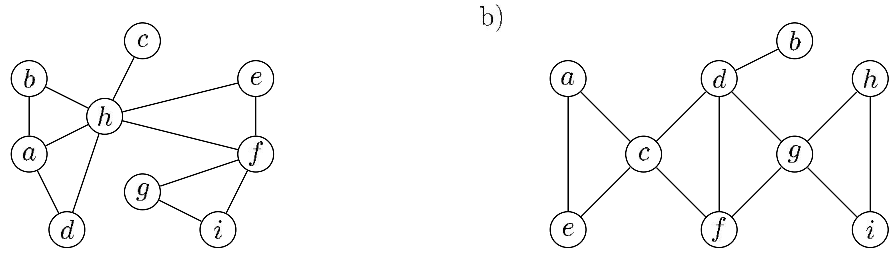
» Rozważamy cykl o wierzchołkach $1, 2, 5, 3$ i usuwamy np. krawędź $\{1, 2\}$.
» Rozważamy cykl o wierzchołkach $2, 3, 5$ i usuwamy np. krawędź $\{3, 5\}$.
» W otrzymanym grafie nie ma już cykli.

Otrzymujemy zatem następujące drzewo spinające $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$. ♯

Zadanie 9.31. Skonstruuj drzewa spinające dla podanych niżej grafów.

a) b)



Niech $T = (V, E')$ będzie dowolnym drzewem spinającym grafu $G = (V, E)$. Cykl *bazowy/podstawowy* w grafie G jest to cykl, który powstaje po dodaniu dowolnej krawędzi $e \in E$ do drzewa T. Wszystkie tak powstałe cykle tworzą zbiór cykli *fundamentalnych/bazowych/podstawowych*, tzw. *bazę cykli* dla danego drzewa spinającego.

Przykład 9.32. Dla drzewa spinającego skonstruowanego w przykładzie 9.30 zbiór fundamentalnych cykli składa się z dwóch cykli C_1 i C_2, gdzie:

$$C_1 = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}),$$
$$C_2 = (\{2, 3, 5\}, \{\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}).$$ ♯

Zadanie 9.33. Wyznacz zbiór cykli fundamentalnych dla drzew skontruowanych w zadaniu 9.31.

9.4 Przeszukiwanie grafów w głąb i wszerz — drzewa DFS i BFS

Algorytm przeszukiwania grafu w głąb

Niech $G = (V, E)$ będzie danym grafem spójnym, a $v \in V$ wierzchołkiem początkowym.

1. Odwiedzamy wierzchołek v (zaznaczamy go jako odwiedzony) i wkładamy go na STOS.

2. Dopóki STOS nie jest pusty, powtarzamy:

   Jeżeli v jest wierzchołkiem na wierzchu STOSU, to sprawdzamy, czy istnieje wierzchołek sąsiedni z v, który nie był jeszcze odwiedzony.

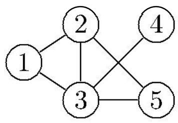
   2.1 Jeżeli u jest takim wierzchołkiem, to odwiedzamy u (zaznaczamy jako odwiedzony) i wkładamy go na STOS.
   2.2 Jeżeli takiego u nie ma, to zdejmujemy v ze STOSU.

Uwaga 1. Jeśli jest kilka wierzchołków do wyboru, to wybieramy zgodnie z ustalonym porządkiem.

Uwaga 2. Wierzchołki na STOSIE w dowolnym kroku tworzą ścieżkę od korzenia do wierzchołka aktualnie odwiedzanego.

Uwaga 3. Jeśli w powyższej procedurze w kroku 2.1, w którym odwiedzamy wierzchołek u, do początkowo pustego zbioru E' krawędzi dodawać będziemy krawędź $\{v, u\}$, to otrzymamy drzewo spinające DFS (ang. *depth-first search*).

Przykład 9.34. Przeszukaj poniższy graf $G = (V, E)$ w głąb poczynając od wierzchołka o etykiecie 3 i skonstruuj odpowiednie drzewo spinające DFS.



Rozwiązanie. Przebieg algorytmu jest następujący.

aktualny wierzchołek	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
3	3	$\emptyset$
1	3,1	$\{\{1,3\}\}$
2	3,1,2	$\{\{1,3\},\{1,2\}\}$
5	3,1,2,5	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
2	3,1,2	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
1	3,1	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
3	3	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\}\}$
4	1,4	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{1,4\}\}$
3	3	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{1,4\}\}$
–	$\emptyset$	$\{\{1,3\},\{1,2\},\{2,5\},\{1,4\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $3, 1, 2, 5, 4$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 4\}\}$. ♯

Algorytm przeszukiwania grafu wszerz

Niech $G = (V, E)$ będzie danym grafem spójnym, a $v \in V$ wierzchołkiem początkowym.

1. Odwiedzamy wierzchołek v (zaznaczamy go jako odwiedzony) i wstawiamy go do KOLEJKI.
2. Dopóki KOLEJKA nie jest pusta, powtarzamy:

   2.1 Bierzemy wierzchołek v z początku KOLEJKI.

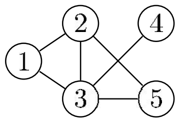
   2.2 Odwiedzamy wszystkie do tej pory jeszcze nie odwiedzone wierzchołki sąsiednie z v (zaznaczamy je jako odwiedzone) i wstawiamy je na koniec KOLEJKI.

Uwaga 1. Wierzchołki wstawiamy do KOLEJKI np. w kolejności uporządkowania etykiet.

Uwaga 2. Wierzchołki przeszukiwane są w kolejności leżących najbliżej korzenia.

Uwaga 3. Jeśli w powyższej procedurze w kroku 2.2, w którym odwiedzamy wszystkie nieodwiedzone jeszcze wierzchołki sąsiednie do v, do początkowo pustego zbioru E' krawędzi dodawać będziemy odpowiednie krawędzie $\{v, u\}$, to otrzymamy drzewo spinające BFS (ang. *breath-first search*).

Przykład 9.35. Przeszukaj poniższy graf $G = (V, E)$ wszerz poczynając od wierzchołka o etykiecie 5 i skonstruuj odpowiednie drzewo spinające BFS.



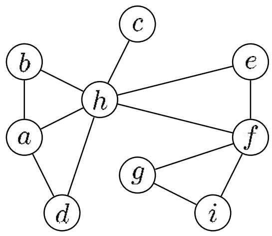
Rozwiązanie. Przebieg algorytmu jest następujący.

aktualny wierzchołek	odwiedzane wierzchołki	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa DFS
5	5	5	$\emptyset$
5	2,3	2,3	$\{\{2,5\},\{3,5\}\}$
2	1	3,1	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\}\}$
3	4	1,4	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$
1	–	4	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$
4	–	$\emptyset$	$\{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$

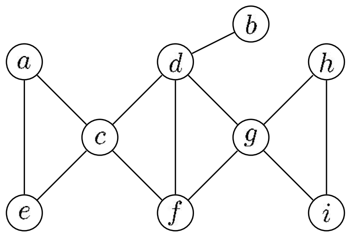
Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $5, 2, 3, 1, 4$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E' = \{\{2,5\},\{3,5\},\{1,2\},\{3,4\}\}$. $\sharp$

Zadanie 9.36. Zastosuj algorytm przeszukiwania w głąb (wszerz) do poniższych grafów i skonstruuj odpowiednie drzewa DFS i BFS; jako wierzchołek początkowy przyjmij wierzchołek o etykiecie a.

a)



b)



Zadanie 9.37.* Niech $v \in V$ będzie wierzchołkiem, z którego startuje algorytm przeszukiwania w głąb grafu $G = (V, E)$. Udowodnij, że dla każdej pary wierzchołków x i y takich, że $\{x, y\} \in E$ mamy, że albo x jest potomkiem y albo y jest potomkiem x w drzewie DFS (inaczej mówiąc, albo y leży na ścieżce z x do v w drzewie BFS albo na odwrót — x leży na ścieżce z y do v).

Zadanie 9.38.* Niech $v \in V$ będzie wierzchołkiem, z którego startuje algorytm przeszukiwania wszerz grafu $G = (V, E)$. Udowodnij, że dla dowolnego wierzchołka $x \in V$ najkrótsza droga z x do v w otrzymanym drzewie BFS jest także najkrótszą drogą z x do v w grafie G.

9.5 Grafy eulerowskie i hamiltonowskie

Niech dany będzie spójny multigraf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *eulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zamknięty zawierający każdą krawędź multigrafu; taki łańcuch nazywamy *cyklem Eulera*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półeulerowski*, jeśli istnieje łańcuch zawierający każdą krawędź grafu; taki łańcuch nazywamy łańcuchem Eulera.

Twierdzenie 9.39

a) *Spójny multigraf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek jest parzystego stopnia.*

b) *Spójny multigraf G jest półeulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy posiada co najwyżej dwa wierzchołki nieparzystego stopnia, z czego jeden z nich jest początkiem łańcucha Eulera, a drugi jego końcem.*

Niech dany będzie spójny (multi)graf $G = (V, E)$. Mówimy, że G jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taki cykl nazywamy cyklem *Hamiltona*. Analogicznie, mówimy, że G jest *półhamiltonowski*, jeśli zawiera ścieżkę przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie raz; taką ścieżkę nazywamy ścieżką *Hamiltona*.

Zadanie 9.40. Ustal, dla jakich wartości n graf pełny K_n posiada:

a) cykl Eulera;
b) cykl Hamiltona.

Zadanie 9.41. Ustal, dla jakich wartości n graf pełny K_n z usuniętą jedną krawędzią posiada:

a) cykl Eulera;
b) łańcuch Eulera;
c) cykl Hamiltona;
d) ścieżkę Hamiltona.

Przypomnijmy, że graf $G = (V, E)$ jest grafem *dwudzielnym*, jeżeli jego zbiór wierzchołków można rozbić na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 takie, że $V_1 \cup V_2 = V$ oraz każda krawędź $e \in E$ ma końce w obu zbiorach, tj. $|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$. *Pełny graf dwudzielny* $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ jest to graf, w którym $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$ oraz krawędzie łączą każdy wierzchołek z V_1 z każdym wierzchołkiem z V_2, tj. $E = \{\{x, y\} : x \in V_1 \text{ oraz } y \in V_2\}$.

Zadanie 9.42. Ustal, dla jakich wartości n i m dwudzielny graf pełny $K_{m,n}$ posiada:

a) cykl Eulera;
b) cykl Hamiltona.

Czy dwudzielny graf G o nieparzystej liczbie wierzchołków może być grafem hamiltonowskim?

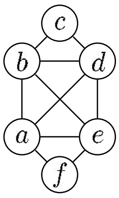
Algorytm znajdowania cyklu Eulera (o ile taki cykl istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym multigrafem o wszystkich wierzchołkach parzystego stopnia.

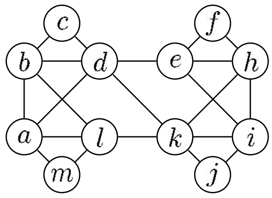
1. Zaczynamy od dowolnego wierzchołka $v \in V$.
2. Powtarzamy, aż przejdziemy wszystkie krawędzie:
   2.1 Jeżeli z bieżącego wierzchołka x odchodzi tylko jedna krawędź, to przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka i usuwamy tą krawędź wraz z wierzchołkiem x.
   2.2 W przeciwnym wypadku, jeżeli z x odchodzi więcej krawędzi, to wybieramy tą krawędź, której usunięcie nie rozspójnia nam grafu, i przechodzimy wzdłuż tej krawędzi do następnego wierzchołka, a następnie usuwamy tą krawędź z grafu.

Zadanie 9.43. Czy w danych niżej grafach istnieje cykl/łańcuch Eulera? Jeśli tak, wyznacz go.

a)



b)



Zadanie 9.44. Czy poniższe kamyki do gry w domino można ułożyć w ciąg tak, aby się „zamknął”? Jeśli tak, wskaż możliwe ułożenie.

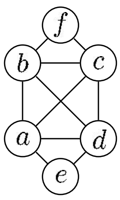
1 | 2	1 | 3	1 | 4	1 | 5
2 | 3	2 | 4	2 | 5	
3 | 4	3 | 5		
4 | 5			

Algorytm z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona (o ile taka droga istnieje)

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem i pewnym wyróżnionym wierzchołkiem $v \in V$.

1. Wkładamy v na STOS.
2. Powtarzamy:
   - 2.1 Jeżeli u jest wierzchołkiem na wierzchu stosu, to szukamy wierzchołka w o najniższym możliwym numerze (najwcześniejszego przy ustalonym porządku wierzchołków grafu) sąsiedniego z u i nie występującego na STOSIE, jednakże przy założeniu, że wierzchołek w jest „większy” od wierzchołka zdjętego krok wcześniej ze STOSU (o ile był taki).
   - 2.2 Jeśli takie w znajdziemy, to wkładany je na stos — jeżeli dotychczasowy STOS tworzy drogę Hamiltona, to KONIEC.
   - 2.3 Jeżeli takiego w nie znaleźliśmy, to zdejmujemy u ze stosu.

Przykład 9.45. Wypisz 25 kolejnych kroków działania algorytmu z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona dla poniższego grafu przy założeniu, że wierzchołkiem początkowym jest wierzchołek o etykiecie a.



Rozwiązanie. Działanie algorytmu z nawrotami ilustruje poniższa tabela.

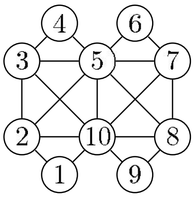
	aktualny wierzchołek	STOS
1	a	a
2	b	a, b
3	c	a, b, c
4	d	a, b, c, d
5	e	a, b, c, d, e
6	d	a, b, c, d
7	c	a, b, c
8	f	a, b, c, f
9	c	a, b, c
10	b	a, b
11	d	a, b, d
12	c	a, b, d, c
13	f	a, b, d, c, f
14	c	a, b, d, c
15	d	a, b, d
16	e	a, b, d, e
17	d	a, b, d
18	b	a, b
19	f	a, b, f
20	c	a, b, f, c
21	d	a, b, f, c, d
22	e	a, b, f, c, d, e
		KONIEC

A zatem algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci a, b, f, c, d, e. ♯

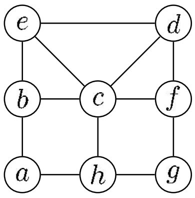
Zadanie 9.46. Wypisz 15 kolejnych kroków działania algorytmu z nawrotami znajdowania drogi Hamiltona dla poniższych grafów przy założeniu, że wierzchołkiem początkowym jest:

a) wierzchołek o etykiecie 5;
b) wierzchołek o etykiecie a.

a)



b)



Problem stwierdzenia, czy w danym grafie $G = (V, E)$ istnieje droga Hamiltona, jest problemem NP-zupełnym, tzn. nie istnieje deterministyczny algorytm rozstrzygający ten problem w czasie wielomianowym, o ile P$\neq$NP. Zauważmy, że nie wyklucza to istnienia niewielomianowego algorytmu i właśnie przykładem takiego algorytmu jest omawiany wyżej algorytm z nawrotami.

Zadanie 9.47. Wskaż graf o n wierzchołkach, dla którego czas działania powyższego algorytmu z nawrotami jest niewielomianowy.

> *Wskazówka.* Aby oszacować z dołu czas działania dla danego grafu, można oszacować tylko np. ile w sumie razy wkładaliśmy jakikolwiek z wierzchołków na stos.

9.6 Zadania różne

Zadanie 9.48. Udowodnij, że izomorfizm grafów jest relacją równoważności.

Graf *regularny* to graf, w którym każdy wierzchołek jest tego samego stopnia; w szczególności, graf r-regularny, $r \geq 0$, to graf, w którym każdy wierzchołek jest stopnia r.

Zadanie 9.49. Niech n będzie liczbą naturalną, a m nieujemną liczbą całkowitą. Wyznacz stopień n-wierzchołkowego grafu regularnego o m krawędziach.

Przykład 9.50. Mamy dowolny graf $G = (V, E)$. Na ile sposobów można pokolorować dwoma kolorami jego wierzchołki? Na ile sposobów można pokolorować dwoma kolorami jego wierzchołki tak, aby z góry wybrana krawędź $e = \{u, v\}$ miała końce w różnych kolorach?

Rozwiązanie. Mamy $|V|$ wierzchołków. Skoro każdemu wierzchołkowi można przypisać dwa różne kolory, np. 0 i 1, to liczba pokolorowań wynosi $2^{|V|}$.

Analogicznie, jeśli końce ustalonej krawędzi $e = \{u, v\}$ mają mieć różne kolory, wówczas albo kolor u wynosi 0, a kolor v wynosi 1, albo na odwrót, czyli kolor u wynosi 1, a kolor v wynosi 0 — natomiast pozostałe wierzchołki mogą otrzymać dowolny kolor. Tym samym w tym przypadku liczba możliwych pokolorowań wynosi $2 \cdot 2^{|V|-2} = 2^{|V|-1}$. ♯

Zadanie 9.51. Mamy dowolny graf $G = (V, E)$. Na ile sposobów można pokolorować p kolorami jego wierzchołki? Na ile sposobów można pokolorować p kolorami jego wierzchołki tak, aby z góry wybrana krawędź $e = \{u, v\}$ miała końce w różnych kolorach?

Zadanie 9.52. Rozważmy dowolne losowe pokolorowanie $k+1 \geq 1$ kolorami wierzchołków grafu $G = (V, E)$ i niech π będzie dowolną ścieżką prostą długości k w grafie G (o ile ścieżka taka istnieje). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wierzchołki ścieżki π są różnych kolorów?

Zadanie 9.53. Wykaż, że jeśli w spójnym grafie G średnia stopni wierzchołków jest większa niż dwa, wówczas G posiada przynajmniej dwa cykle. Co można powiedzieć o liczbie cykli, gdy (a) średnia stopni wierzchołków jest mniejsza niż 2; (b) średnia stopni wierzchołków jest równa 2?

Zadanie 9.54. Wykaż, że jeśli n-wierzchołkowy graf (prosty) G o m krawędziach spełnia warunek $m > \binom{n-1}{2}$, to G jest spójny.

> *Wskazówka.* Dowód przez sprzeczność — próbujemy oszacować maksymalną liczbę krawędzi w grafie zakładając, że graf ma przynajmniej dwie składowe spójności, z których jedna ma $k \geq 1$ wierzchołków.

9.7 Grafy ważone — minimalne drzewo spinające

Niech $G = (V, E, w)$ będzie *grafem ważonym*, tzn. każdej krawędzi $e \in E$ przyporządkowana jest pewna waga $w(e)$. Problem *Minimalnego Drzewa Spinającego* [MDS] definiujemy jako znalezienie drzewa spinającego $T = (V, E')$ w grafie G o minimalnej sumie ważonej

$$\sum_{e \in E'} w(e).$$

Minimalne drzewo spinające znajduje zastosowanie np. przy wyznaczeniu „najtańszej" sieci dróg, torów kolejowych, itp., która łączy danych n miast.

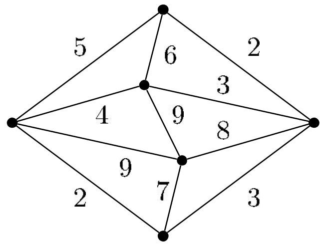
Algorytm konstrukcji minimalnego drzewa spinającego (algorytm Kruskala, 1956)

Niech $G = (V, E, w)$ będzie spójnym grafem ważonym z funkcją wagi $w\colon E \to R$.

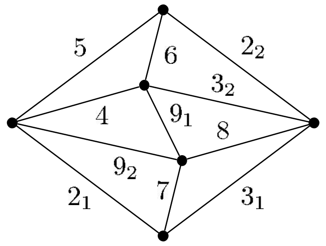
1. $T := (V, E')$, gdzie $E' := \emptyset$.
2. Posortuj krawędzie grafu G w kolejności niemalejących wag.
3. Dla każdej krawędzi $e \in E$:

   jeśli dodanie rozważanej krawędzi e nie utworzy cyklu w T, wówczas $E' := E' \cup \{e\}$.

Przykład 9.55. Znajdź minimalne drzewo spinające dla podanego niżej grafu.



Rozwiązanie. Posortowany ciąg krawędzi wygląda następująco: $2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9$. Jako że niektóre wagi krawędzi powtarzają się, należy je rozróżnić np. dodając odpowiedni indeks dolny — otrzymujemy ciąg $2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 4, 5, 6, 7, 8, 9_1, 9_2$ — patrz poniższy rysunek.

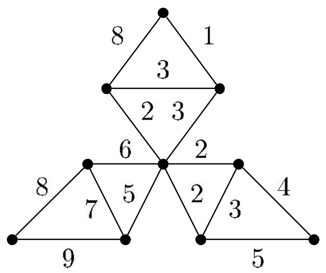


Dla ułatwienia ilustracji działania algorytmu utożsamiamy wagi krawędzi z samymi krawędziami. Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywana krawędź	cykl?	krawędzie drzewa
2_1	$-$	2_1
2_2	$-$	$2_1, 2_2$
3_1	$-$	$2_1, 2_2, 3_1$
3_2	$-$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
4	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
5	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
6	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2$
7	$-$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
8	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
9_1	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$
9_2	$+$	$2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 7$

Zauważmy, że skoro graf ma 6 wierzchołków, a z definicji drzewo spinające ma 5 krawędzi, wykonywanie algorytmu można było już przerwać, gdy dodaliśmy 5-tą krawędź o wadze 7. ♯

Zadanie 9.56. Znajdź minimalne drzewo spinające dla podanego niżej grafu.



Zadanie 9.57. Poniższa tabela przedstawia odległości pomiędzy 5 miastami A,B,C,D i E. Chcemy tak połączyć miasta, aby z każdego miasta można było dostać się do innego, niekoniecznie drogą bezpośrednią, jednakże chcemy wydać jak najmniej pieniędzy. Jaki jest minimalny koszt budowy takiej sieci dróg, jeżeli 1 km drogi kosztuje 1000000 PLN?

	A	B	C	D	E
A	–	2	6	3	7
B	2	–	6	4	8
C	6	6	–	5	8
D	3	4	5	–	9
E	7	8	8	9	–

Zadanie 9.58.* Niech $G = (V, E, w)$ będzie eulerowskim grafem ważonym takim, że

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e) > 0.$$

Wykaż, że w G istnieje cykl C taki, że $w(C) = \sum_{e \in C} w(e) > 0$.

9.8 Grafy ważone — najkrótsze drogi w grafie

Rozważmy graf ważony $G = (V, E, w)$ z dodatnią funkcją kosztu, tj. $w : E \to \mathbb{R}^+$. Dla prostoty zakładamy, że jeśli $e \notin E$, to $w(e) = \infty$. Dla każdej drogi $v_0 v_1 \ldots v_k$ w grafie zdefiniujmy jej *długość* jako sumę długości krawędzi, czyli

$$\sum_{i=1}^{k} (w(\{v_{i-1}, v_i\})).$$

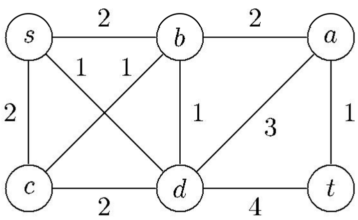
Jeżeli $k = 0$, wówczas droga składa się z pojedynczego wierzchołka i przyjmujemy wtedy, że jej długość wynosi 0.

Algorytm wyznaczania długości najkrótszych dróg (algorytm Dijkstry)

Niech $s \in V$ będzie ustalonym wierzchołkiem ważonego grafu $G = (V, E, w)$ o dodatniej funkcji kosztu. Algorytm na wyjściu zwraca macierz D, gdzie dla wierzchołka $v \in V$ wartość $D[v]$ jest długością najkrótszej ścieżki z s do v.

1. $D[s] := 0$.
2. $\bar{V} := V \setminus \{s\}$.
3. Dla każdego $v \in \bar{V}$ podstaw $D[v] := w(\{s, v\})$.
4. Dopóki $\bar{V} \neq \emptyset$, wykonuj:
   4.1 Wybierz wierzchołek $u \in \bar{V}$ taki, że $D[u] = \min_{x \in \bar{V}} D[x]$.
   4.2 $\bar{V} := \bar{V} \setminus \{u\}$.
   4.3 Dla każdego $v \in \bar{V}$ podstaw $D[v] := \min(D[v], D[u] + w(\{u, v\}))$.

Przykład 9.59. Wyznacz drzewo najkrótszych dróg w podanym niżej ważonym grafie $G = (V, E, w)$ dla wierzchołka początkowego s.



Rozwiązanie. Poniższa tabela ilustruje jak w kolejnych iteracjach zewnętrznej pętli algorytmu Dijkstry wybierany jest wierzchołek u oraz jak przedstawia się zbiór $\bar{V}$ oraz macierz D.

Iteracja	u	$\bar{V}$	$D[s]$	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[t]$
0		$\{a, b, c, d, t\}$	0	∞	2	2	$\underline{1}$	∞
1	d	$\{a, b, c, t\}$	0	4	$\underline{2}$	2	1	5
2	b	$\{a, c, t\}$	0	3	2	$\underline{2}$	1	5
3	c	$\{a, t\}$	0	$\underline{3}$	2	2	1	5
4	a	$\{t\}$	0	3	2	2	1	$\underline{4}$
5	t	$\emptyset$	0	3	2	2	1	4

$\sharp$

Zauważmy, że algorytm Dijkstry wyznacza tylko macierz najkrótszych odległości, nie zapamiętując w czasie wykonywania żadnych dodatkowych informacji. Aby wyznaczyć najkrótszą drogę z wierzchołka s do wybranego wierzchołka v można albo zmodyfikować algorytm tak, aby za każdym razem, kiedy usuwamy wierzchołek u ze zbioru $\bar{V}$, dodawał on odpowiednią krawędź do konstruowanego drzewa najkrótszych dróg, albo też skorzystać bezpośrednio z wyznaczonej macierzy D. A dokładnie, załóżmy, że interesuje nas wyznaczenie najkrótszej ścieżki z wierzchołka s do t w grafie $G = (V, E, w)$ z przykładu 9.59.

Najkrótszą drogę wyznaczamy od końca — najpierw szukamy przedostatniego wierzchołka tej drogi, potem trzeciego od końca i tak dalej.

- Przedostatni wierzchołek x najkrótszej drogi spełnia równość $D[t] = D[x] + w(\{x, t\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $x = a$ spełnia tą równość:

  $$4 = D[t] = D[a] + w(\{a, t\}) = 3 + 1.$$

  A zatem przedostatnim wierzchołkiem jest wierzchołek a.

- Trzeci wierzchołek y od końca najkrótszej drogi z s do t — a przedostatni wierzchołek najkrótszej drogi z s do a — spełnia równość $D[a] = D[y]+w(\{y,a\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $y = b$ spełnia tą równość:

$$3 = D[a] = D[b] + w(\{b,a\}) = 2 + 1.$$

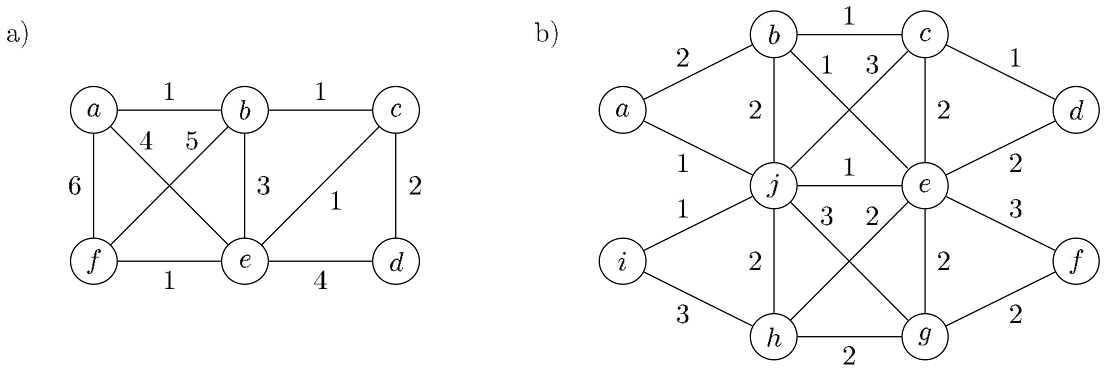
  A zatem pozostaje na znaleźć najkrótszą drogę z s do b.

- Czwarty wierzchołek z od końca najkrótszej drogi z s do t — a przedostatni wierzchołek najkrótszej drogi z s do b — spełnia równość $D[b] = D[z]+w(\{z,b\})$. W naszym przykładzie (tylko) wierzchołek $y = s$ spełnia tą równość:

$$2 = D[b] = D[s] + w(\{s,b\}) = 0 + 2.$$

W konsekwencji najkrótsza droga z s do t długości 4 wiedzie przez wierzchołki s, b, a i t.

Zadanie 9.60. W poniższych grafach znajdź długość najkrótszej drogi z wierzchołka a do f, a następnie wyznacz tę drogę.



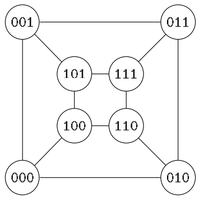
9.9 Rozsyłanie wiadomości w hiperkostce

Graf zwany *hiperkostką* H_k zdefiniowany jest rekurencyjnie. H_1 składa się z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią. Natomiast hiperkostkę H_k wymiaru k budujemy z dwóch kostek H_{k-1} wymiaru $k-1$. W pierwszej kostce etykietujemy wierzchołki dopisując `0` na początku nazwy każdego wierzchołka, natomiast w drugiej kostce etykietujemy wierzchołki dopisując `1` na początek. Następnie łączymy krawędziami odpowiadające sobie wierzchołki z obu kopii, czyli wierzchołek `0x` jest połączony z wierzchołkiem `1x` dla każdego `x` z $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{k-1}$.

Protokół rozsyłania wiadomości w hiperkostce H_k.

1. Na początku wiadomość otrzymuje wierzchołek $\mathtt{0}^k$.
2. Dla każdego i od 1 do k, wykonuj:
   2.1 Każdy wierzchołek o etykiecie $x < 2^{i-1}$
   przekazuje wiadomość do wierzchołka o etykiecie $x + 2^{i-1}$.

Przykład 9.61. Prześledźmy działanie powyższego algorytmu na hiperkostce H_3.



Hiperkostka H_3.

- W pierwszej iteracji, dla $i = 1$, wierzchołek 000 przekazuje wiadomość do 001.
- W drugiej iteracji, dla $i = 2$, wierzchołek 000 przekazuje wiadomość do 010, a wierzchołek 001 do 011.
- W trzeciej iteracji, dla $i = 3$, wierzchołek 000 przekazuje wiadomość do 100, wierzchołek 001 do 101, wierzchołek 010 do 110, a wierzchołek 011 do 111. ♯

Zadanie 9.62. Prześledź działanie algorytmu rozsyłania wiadomości na hiperkostkach H_4.

Protokół zbierania wiadomości w hiperkostce H_k.

1. Dla każdego i od 1 do k, wykonuj:
   1.1 Każdy wierzchołek o etykiecie $x = 0^{i-1}1\sigma$, gdzie $\sigma \in \{0, 1\}^{k-i}$, przekazuje zebrane dane do wierzchołka o etykiecie $0^{i-1}0\sigma$.

Przykład 9.63. Prześledźmy działanie powyższego algorytmu na hiperkostce H_3.

- W pierwszej iteracji, dla $i = 1$, wierzchołek 100 przekazuje dane do 000, wierzchołek 101 do 001, wierzchołek 110 do 010, a wierzchołek 111 do 011.
- W drugiej iteracji, dla $i = 2$, wierzchołek 010 przekazuje wszystkie dane (swoje i otrzymane) do 000, a wierzchołek 011 do 001.
- W trzeciej iteracji, dla $i = 3$, wierzchołek 001 przekazuje zebrane wiadomości do 000. ♯

Zadanie 9.64. Prześledź działanie algorytmu zbierania wiadomości na hiperkostce H_4.

9.10 Pytania powtórzeniowe

Zadanie 9.65. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe? (Odpowiedź: TAK/NIE)

a) Relacja sąsiedztwa grafu prostego jest relacją symetryczną.
b) Ciąg stopni grafu prostego może być ciągiem rosnącym.
c) Ciąg stopni multigrafu może być ciągiem rosnącym.
d) Podgraf indukowany w niepustym grafie jest niepustym grafem.
e) Suma wyrazów ciągu grafowego musi być parzysta.
f) Podgraf indukowany w grafie o minimalnym stopniu $\delta > 0$ jest niepustym grafem.
g) Grafy izomorficzne mają identyczną liczbę krawędzi i wierzchołków.
h) Grafy izomorficzne mają identyczną liczbę wierzchołków wiszących.

i) Grafy o identycznej liczbie krawędzi, wierzchołków i wierzchołków wiszących są izomorficzne.
j) Ciągi stopni grafów izomorficznych są identyczne.
k) Grafy o identycznych ciągach stopni są izmorficzne.
l) Grafy o identycznej liczbie krawędzi, wierzchołków, wierzchołków wiszących i ciągach stopni są izomorficzne.
m) Spójne grafy regularne o identycznej liczbie wierzchołków i krawędzi są izomorficzne.

Odpowiedzi do zadań

9.7.

a) Tak. b) Tak. c) Nie. d) Tak.

9.8. Dowód indukcyjny.

(1.a). $n = 1$. Wówczas graf G jest pojedynczą krawędzią, ciąg stopni: $(1, 1)$.
(1.b). $n = 2$. Wówczas graf G jest ścieżką P_4, ciąg stopni: $(1, 1, 2, 2)$.
(2). Załóżmy, że ciąg stopni $(1, 1, 2, 2, \ldots, n', n')$ jest grafowy dla dowolnego $n' < n$.
(3). Rozważmy ciąg $(1, 1, 2, 2, \ldots, n, n)$, gdzie $n > 2$. Z założenia indukcyjnego istnieje graf G' realizujący ciąg grafowy $(1, 1, 2, 2, \ldots, n-2, n-2)$. Najpierw dodajmy do G' dwa nowe wierzchołki o stopniach 0 (ciąg $(0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots, n-2, n-2)$ jest również grafowy), a następnie dodajmy kolejne dwa wierzchołki, połączmy je krawędzią, oraz każdy z nich połączmy z każdym, ale po jednym tylko (i różnym) z wierzchołków stopnia $0, 1, 2, 3, \ldots, n-2$. Stopnie wszystkich wierzchołków należących do G' wzrosły o jeden, dwa dodane na początku wierzchołki stały się liśćmi, a dwa dodane ostatnio wierzchołki są stopnia n. Zatem otrzymany graf G ma ciąg stopni $(1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1, n, n)$.

9.9. Wystarczy zastosować zasadę szufladkową. Oczywiście w grafie prostym o n wierzchołkach nie może zaistnieć sytuacja, że jakiś wierzchołek jest stopnia 0 (nie jest sąsiedni z żadnym z wierzchołków), a jakiś inny stopnia $n-1$ (jest sąsiedni ze wszystkimi). Zatem dopuszczalne są albo stopnie $0, 1, \ldots, n-2$ albo $1, \ldots, n-1$. Jako że mamy n wierzchołków i tylko $n-1$ możliwych wartości stopni (w każdej z dwóch sytuacji), zatem istnieją dwa wierzchołki o tym samym stopniu.

9.10.

a) $n = k$ oraz $n \geq k + 2$.

b) k parzyste: $n \geq k$;
$k = 1$: $n \geq 4$;
$k \geq 3$ nieparzyste: $n \geq k + 1$.

9.11.

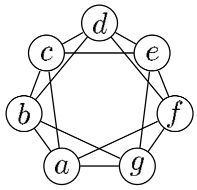
a) $n = k$: $\min = \max = 0$.
$n \geq k + 2$: $\min = \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$, $\max = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

b) k parzyste: $\min = \frac{k}{2}$, $\max = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.
$k = 1$, $n \geq 4$: $\min = 4$, $\max = 1 + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.
$k \geq 3$ nieparzyste, $n \geq k + 1$: $\min = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, $\max = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

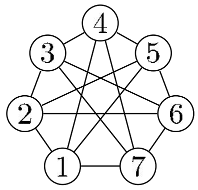
9.14. Niech $e = \{x, y\}$ będzie rozważaną krawędzią, a $C_1 = (V_1, E_1)$ i $C_2 = (V_2, E_2)$ dowolnymi różnymi cyklami zawierającymi krawędź e. Wówczas zbiór krawędzi $E_3 = E_1 \otimes E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$ wraz z końcami tych krawędzi tworzy cykl C_3, który nie zawiera krawędzi e.

9.19. Rozważmy następujące etykietowanie grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$.

G_1



G_2



Zdefiniujmy funkcję h następująco:

$$h(a) = 1,\ h(b) = 4,\ h(c) = 7,\ h(d) = 3,\ h(e) = 6,\ h(f) = 2,\ h(g) = 5.$$

Zachodzi:

$$\{a,b\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(a), h(b)\} = \{1,4\} \in E_2;$$
$$\{a,c\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(a), h(c)\} = \{1,7\} \in E_2;$$
$$\{a,f\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(a), h(f)\} = \{1,2\} \in E_2;$$
$$\{a,g\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(a), h(g)\} = \{1,5\} \in E_2;$$
$$\{b,c\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(b), h(c)\} = \{4,7\} \in E_2;$$
$$\{b,d\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(b), h(d)\} = \{4,3\} \in E_2;$$
$$\{b,g\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(b), h(g)\} = \{4,5\} \in E_2;$$
$$\{c,d\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(c), h(d)\} = \{7,3\} \in E_2;$$
$$\{c,e\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(c), h(e)\} = \{7,6\} \in E_2;$$
$$\{d,e\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(d), h(e)\} = \{3,6\} \in E_2;$$
$$\{d,f\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(d), h(f)\} = \{3,2\} \in E_2;$$
$$\{e,f\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(e), h(f)\} = \{6,2\} \in E_2;$$
$$\{e,g\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(e), h(g)\} = \{6,5\} \in E_2;$$
$$\{f,g\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(f), h(g)\} = \{2,5\} \in E_2.$$

A tym samym h jest izomorfizmem — grafy te są izomorficzne.

9.20. Załóżmy, że grafy te są izomorficzne. Jako że w każdym z grafów istnieje dokładnie jedna pętla, izomorfizm musi przekształcać odpowiednie te wierzchołki w siebie — oznaczmy je przez a_1 (w grafie pierwszym) oraz a_2 (w grafie drugim). Następnie, skoro wiemy już, że w pierwszym grafie wierzchołek a_1 musi odpowiadać wierzchołkowi a_2 w grafie drugim, to izomorfizm musi zachować własności ich sąsiadów, a w szczególności także ich stopnie. Ale a_1 jest sąsiedni do dwóch wierzchołków stopnia 2 oraz 4, podczas gdy a_2 jest sąsiedni do dwóch wierzchołków stopnia 2 oraz 3. A zatem niemożliwym jest takie przypisanie sobie tych wierzchołków, aby zachować odpowiedniość pomiędzy ich stopniami. Otrzymujemy tym samym sprzeczność z założeniem, że grafy są izomorficzne.

9.21. (b) i (c) tak; (d) nie, bo graf ten posiada nieparzysty cykl, których brak w (a), a izomorfizm zachowuje długości cykli.

9.22. Z definicji izomorfizmu wynika, że G i $\overline{G}$ mają tyle samo krawędzi — załóżmy, że m. Jako że suma G i $\overline{G}$ jest grafem pełnym, stąd $2m = \frac{n(n-1)}{2}$. Zatem $m = \frac{n(n-1)}{4}$. Ale n i $n-1$ są kolejnymi liczbami, zatem niemożliwe jest, aby 2 dzieliła każdą z nich, co daje, że albo $4|n$ albo $4|n+1$, czyli $n = 4k$ lub $n = 4k+1$.

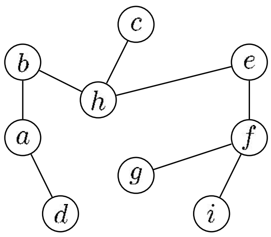
9.27. Z faktu 9.1 otrzymujemy, że $10 \cdot 3 + l \cdot 1 = 2m$, gdzie l jest liczbą liści. Z drugiej strony, jako że T jest drzewem, $2m = 2(n-1) = 2n - 2 = 2 \cdot (10 + l) - 2$. Tym samym otrzymujemy, że $l = 12$.

9.28. Z treści oraz z faktu 9.1 mamy, że $\frac{1}{n}\sum_{v \in V} \deg(v) = \frac{2(n-1)}{n} = 1.99$. Tym samym, po przekształceniach, otrzymujemy $n = 200$.

9.29. Z faktu 9.1 otrzymujemy, że liczba wierzchołków nieparzystego stopnia jest parzysta, a zatem n jest parzyste, co daje $m = n - 1$ nieparzyste.

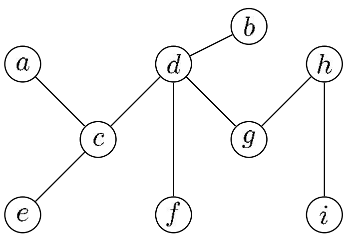
9.31.

a) Np.:



Drzewo spinające $T = (V, E)$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$.

b) Np.:



Drzewo spinające $T = (V, E)$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$.

9.33. Dla przykładowych drzew spinających skonstruowanych w rozwiązaniu zadania 31 zbiór cykli wyndamentalnych składa się z:

a) czterech cykli C_1, C_2, C_3 oraz C_4, gdzie

$$C_1 = (\{a, b, d, h\}, \{\{a, b\}, \{b, h\}, \{d, h\}, \{a, d\}\}),$$
$$C_2 = (\{a, b, h\}, \{\{a, b\}, \{b, h\}, \{a, h\}\}),$$
$$C_3 = (\{e, f, h\}, \{\{e, f\}, \{f, h\}, \{e, h\}\}),$$
$$C_4 = (\{f, g, i\}, \{\{f, g\}, \{g, i\}, \{f, i\}\}).$$

b) czterech cykli C_1, C_2, C_3 oraz C_4, gdzie

$$C_1 = (\{a, c, e\}, \{\{a, c\}, \{c, e\}, \{a, e\}\}),$$
$$C_2 = (\{c, d, f\}, \{\{c, d\}, \{d, f\}, \{c, f\}\}),$$
$$C_3 = (\{d, f, g\}, \{\{d, f\}, \{f, g\}, \{d, g\}\}),$$
$$C_4 = (\{g, h, i\}, \{\{g, h\}, \{h, i\}, \{g, i\}\}).$$

9.36.

a) DFS:

	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
$\underline{a}$	a	$\emptyset$
$\underline{b}$	a, b	$\{\{a, b\}\}$
$\underline{h}$	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}\}$
$\underline{c}$	a, b, h, c	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}\}$
h	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}\}$
$\underline{d}$	a, b, h, d	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$
h	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$
$\underline{e}$	a, b, h, e	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}$
$\underline{f}$	a, b, h, e, f	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}\}$
$\underline{g}$	a, b, h, e, f, g	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}$
$\underline{i}$	a, b, h, e, f, g, i	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
g	a, b, h, e, f, g	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
f	a, b, h, e, f	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
e	a, b, h, e	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
h	a, b, h	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
b	a, b	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
a	a	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$
–	$\emptyset$	$\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, b, h, c, d, e, f, g, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E' = \{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$.

BFS:

	odwiedzane wierz.	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa DFS
a	a	a	$\emptyset$
a	b, d, h	b, d, h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
b	—	d, h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
d	—	h	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$
h	c, e, f	c, e, f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
c	—	e, f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
e	—	f	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$
f	g, i	g, i	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$
g	—	i	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$
i	—	—	$\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, b, d, h, c, e, f, g, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E' = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$.

b) DFS:

	STOS	zbiór krawędzi drzewa DFS
$\underline{a}$	a	$\emptyset$
$\underline{c}$	a, c	$\{\{a, c\}\}$
$\underline{d}$	a, c, d	$\{\{a, c\}, \{c, d\}\}$
$\underline{b}$	a, c, d, b	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
d	a, c, b	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
$\underline{f}$	a, c, d, f	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}\}$
$\underline{g}$	a, c, d, f, g	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}\}$
$\underline{h}$	a, c, d, f, g, h	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$
$\underline{i}$	a, c, d, f, g, h, i	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
h	a, c, d, f, g, h	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
g	a, c, d, f, g	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
f	a, c, d, f	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
d	a, c, d	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
c	a, c	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$
$\underline{e}$	a, c, e	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
c	a, c	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
a	a	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$
–	$\emptyset$	$\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, c, d, b, f, g, h, i, e$ i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS $T = (V, E')$, gdzie
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz
$E' = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$.

BFS:

	odwiedzane wierz.	KOLEJKA	zbiór krawędzi drzewa DFS
a	a	a	$\emptyset$
a	c, e	c, e	$\{\{a,c\},\{a,e\}\}$
c	d, f	e, d, f	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\}\}$
e	—	d, f	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\}\}$
d	b, g	f, b, g	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\}\}$
f	—	b, g	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\}\}$
b	—	g	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\}\}$
g	h, i	h, i	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\},\{h,g\},\{h,i\}\}$
h	—	i	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\},\{h,g\},\{h,i\}\}$
i	—	—	$\{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\},\{h,g\},\{h,i\}\}$

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności $a, c, e, d, f, b, g, h, i$ i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS $T = (V, E')$, gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ oraz

$E' = \{\{a,c\},\{a,e\},\{c,d\},\{c,f\},\{b,d\},\{d,g\},\{h,g\},\{h,i\}\}$

9.40.

a) $n \geq 1$ nieparzyste.
b) $n \geq 3$.

9.41.

a) Tylko dla $n = 1$.
b) $n \geq 1$ nieparzyste oraz $n = 4$.
c) $n \geq 4$.
d) $n \geq 1$.

9.42.

a) n i m dodatnie i parzyste.
b) $n = m$.

NIE. W dowolnym grafie o nieparzystej liczbie wierzchołków cykl Hamiltona, o ile istnieje, jest nieparzystej długości. Natomiast w dowolnym grafie dwudzielnym każdy cykl jest parzystej długości — brak jest cykli nieparzystej długości. Zatem w grafie dwudzielnym o nieparzystej liczbie wierzchołków również brak jest cykli nieparzystej długości, zatem tym bardziej cykli Hamiltona.

9.43.

a) Wszystkie stopnie w grafie G są parzyste, zatem w grafie istnieje cykl Eulera. Zaczynamy np. od wierzchołka a. Kolejno wybierane/trawersowane krawędzie to np.:

$$\{a,d\},\{d,e\},\{e,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,a\},\{a,f\},\{f,e\},\{e,a\}.$$

Uwaga. Np. po wyborze krawędzi $\{e,b\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{a,b\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z b.

b) W grafie istnieją dwa wierzchołki o nieparzystych stopniach (d i k), zatem w grafie istnieje łańcuch Eulera o początku i końcu w wierzchołkach d i k. Zaczynamy np. od wierzchołka d. Kolejno trawersowane krawędzie to np.:

$$\{d,a\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,b\},\{b,l\},\{l,a\},\{a,m\},\{m,l\},$$

$$\{l,k\},\{k,j\},\{j,i\},\{i,k\},\{k,h\},\{h,e\},\{e,f\},\{f,h\},\{h,i\},\{i,e\},\{e,d\},\{d,k\}.$$

Uwaga. Np. po wyborze krawędzi $\{b,l\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{l,k\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z b; analogicznie, po wyborze krawędzi $\{h,e\}$ nie możemy wybrać krawędzi $\{d,e\}$, gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z e.

9.44. Podaną sytuację należy utożsamić z grafem $G=(V,E)$ o 5 wierzchołkach ($V=1,2,3,4,5$), w którym istnieje krawędź $\{i,j\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje kostka domina $[i,j]$ bądź $[j,i]$. Wówczas istnienie wymaganego ułożenia kostek równoważne jest istnieniu cyklu Eulera w tak skonstruowanym grafie G.

W naszym przypadku rozważany graf G jest grafem pełnym, w którym każdy wierzchołek jest stopnia 4, a zatem istnieje cykl Eulera — np.

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\},\{1,3\},\{3,5\},\{5,2\},\{2,4\},\{4,1\},$$

co wyznacza jednoznacznie ułożenie kostek domina:

$$[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[5,1],[1,3],[3,5],[5,2],[2,4],[4,1].$$

9.46.

a) Startując z wierzchołka 5:

	aktualny wierzchołek	STOS
1	5	5
2	2	5, 2
3	1	5, 2, 1
4	10	5, 2, 1, 10
5	3	5, 2, 1, 10, 3
6	4	5, 2, 1, 10, 3, 4
7	3	5, 2, 1, 10, 3
8	10	5, 2, 1, 10
9	7	5, 2, 1, 10, 7
10	6	5, 2, 1, 10, 7, 6
11	7	5, 2, 1, 10, 7
12	8	5, 2, 1, 10, 7, 8
13	9	5, 2, 1, 10, 7, 8, 9
14	8	5, 2, 1, 10, 7, 8
15	7	5, 2, 1, 10, 7
...	...	...

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci $5,4,3,2,1,10,9,8,7,6$.

b) Startując z wierzchołka a:

	aktualny wierzchołek	STOS
1	a	a
2	b	a, b
3	c	a, b, c
4	d	a, b, c, d
5	e	a, b, c, d, e
6	d	a, b, c, d
7	f	a, b, c, d, f
8	g	a, b, c, d, f, g
9	h	a, b, c, d, f, g, h
10	g	a, b, c, d, f, g
11	f	a, b, c, d, f
12	d	a, b, c, d
13	c	a, b, c
14	e	a, b, c, e
15	d	a, b, c, e, d
...	...	...

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci a, b, c, e, d, f, g, h.

9.48. Relacja równoważności $g_1 \circ g_2$:

(1) $g_1 \circ g_1$ (zwrotna)
(2) $g_1 \circ g_2$ to $g_2 \circ g_1$ (symetryczna)
(3) $g_1 \circ g_2$ i $g_2 \circ g_3$ to $g_1 \circ g_3$ (przechodnia)

Wykażemy, że izomorfizm jest relacją równoważności.

(1) Z definicji: dowolny graf G jest izomorficzny z samym sobą, a szukana funkcja h to identyczność.

(2) Jeśli $G_1 \cong G_2$, to istnieje izomorfizm h przekształcający graf $G_1 = (V_1, E_1)$ w graf $G_2 = (V_2, E_2)$ taki, że

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(u), h(v)\} \in E_2.$$

Niech h^{-1} będzie funkcją odwrotną do h; oczywiście h^{-1} jest izomorfizmem. Niech x, y dowolnymi wierzchołkami grafu G_2. Jako że $G_1 \cong G_2$, wówczas istnieją wierzchołki u i v w G_1 takie, że $h(u) = x$ i $h(v) = y$. Należy wykazać, że

$$\{x, y\} \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{h^{-1}(x), h^{-1}(y)\} \in E_1.$$

Ale warunek $\{x, y\} \in E_2$ równoważny jest $\{h(u), h(v)\} \in E_2$, a to (z założenia) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\{u, v\} \in E_1$, co równoważne jest $\{h^{-1}(x), h^{-1}(y)\} \in E_1$.

(3) Jeśli $G_1 \cong G_2$, to istnieje izomorfizm h przekształcający graf $G_1 = (V_1, E_1)$ w graf $G_2 = (V_2, E_2)$ taki, że

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(u), h(v)\} \in E_2.$$

Jeśli $G_2 \cong G_3$, to istnieje izomorfizm g przekształcający graf $G_2 = (V_2, E_2)$ w graf $G_3 = (V_3, E_3)$ taki, że

$$\{x, y\} \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{g(x), g(y)\} \in E_3.$$

Wówczas niech f będzie złożeniem $g \cdot h$. Oczywiście f jest izomorfizmem i pozostaje jedynie wykazać, że

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E_3.$$

Ale z założenia zachodzi

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{h(u), h(v)\} \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \{g(h(u)), g(h(u))\} \in E_3 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E_3,$$

co należało wykazać.

9.49. $r = \frac{2m}{n}$.

9.51. $p^{|V|}$ oraz $2 \cdot \binom{p}{2} \cdot p^{|V|-2} = (p-1) \cdot p^{|V|-1}$.

9.52. $\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}$.

Rozwiązanie. 53 a) Niech n i m oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków i krawędzi grafu spójnego $G = (V, E)$. Wówczas z treści mamy, że $\frac{1}{n}\sum_{v \in V} \deg(v) > 2$. Tym samym z Faktu 9.1 otrzymujemy, że $\frac{m}{n} > 2$, a stąd $m > n$. Zatem z Twierdzenia 9.24 otrzymujemy, że w G istnieje cykl. Jednakże usunięcie dowolnej krawędzi tego cyklu nie rozspaja grafu, co więcej, otrzymana liczba krawędzi wynosi $m' = m - 1 \geq n$, a zatem znowu z Twierdzenia 9.24 wynika istnienie kolejnego cyklu. Stąd graf G posiada przynajmniej dwa różne cykle.

W przypadku b) rozumowanie analogiczne do powyższego prowadzi do wniosku, że nie będzie będzie istniał żaden cykl, gdyż otrzymamy $m \leq n - 1$, czyli graf G jest drzewem (jest spójny z założenia). Natomiast w przypadku c) graf G posiada jeden cykl.

9.54. Załóżmy, że graf G spełniający warunek $m > \binom{n-1}{2}$ jest niespójny. Rozważmy jego składową spójność o minimalnej liczbie wierzchołków k. Wówczas graf G ma co najwyżej

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

krawędzi: odpowiada to optymistycznej sytuacji, gdy są tylko dwie składowe spójności, każda będąca grafem pełnym. Tym samym otrzymujemy, że

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \geq m > \binom{n-1}{2},$$

$$k(k-1) + (n-k)(n-k-1) > (n-1)(n-2),$$

$$k^2 - k + n^2 - kn - n - nk + k^2 + k > n^2 - 3n + 2,$$

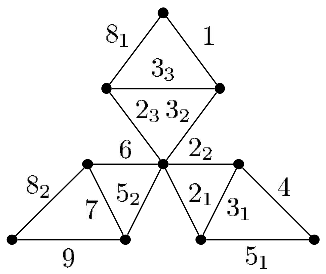
$$k^2 - 1 > n(k-1).$$

Zauważmy jednak, że skoro są przynajmniej dwie składowe spójności, to $n \geq k + 1$, co prowadzi do

$$k^2 - 1 > n(k-1) \geq k^2 - 1,$$

czyli do sprzeczności.

9.55.



Posortowany ciąg krawędzi: $1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3, 4, 5_1, 5_2, 6, 7, 8_1, 8_1, 9$.
Dla ułatwienia ilustracji działania algorytmu utożsamiamy wagi krawędzi z samymi krawędziami. Przebieg algorytmu jest następujący.

rozpatrywana krawędź	cykl?	krawędzie drzewa
1	−	1
2_1	−	$1, 2_1$
2_2	−	$1, 2_1, 2_2$
2_3	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3$
3_1	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3$
3_2	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2$
3_3	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2$
4	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4$
5_1	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4$
5_2	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2$
6	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
7	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
8_1	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6$
8_2	−	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6, 8$
9	+	$1, 2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 4, 5_2, 6, 8$

9.57. Zauważmy, że rozwiązanie problemu równoważne jest minimalnemu drzewu spinającemu w ważonym grafie pełnym $G = (V, E, w)$, w którym wierzchołki odpowiadają miastom, a wagi krawędzi odległościom pomiędzy tymi miastami. Aby wyznaczyć to drzewo korzystamy z algorytmu Kruskala — koszt otrzymanego rozwiązania/drzewa wynosi 17000000 PLN.

9.60.

a)

Iteracja	u	V	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[e]$	$D[f]$
0		$\{b, c, d, e, f\}$	0	$\underline{1}$	∞	∞	4	6
1	b	$\{c, d, e, f\}$	0	1	$\underline{2}$	∞	4	6
2	c	$\{d, e, f\}$	0	1	2	4	$\underline{3}$	6
3	e	$\{d, f\}$	0	1	2	$\underline{4}$	3	4
4	d	$\{f\}$	0	1	2	4	3	$\underline{4}$
5	f	$\emptyset$	0	1	2	4	3	4

A zatem najkrótsza ścieżka z a do f ma długość $D[f] = 4$. Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 4 = D[f] &= D[e] + 1 = (D[c] + 1) + 1 = ((D[b] + 1) + 1) + 1 = \\ &= (((D[a] + 1) + 1) + 1) + 1 = (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 4. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki a, b, c, e, f.

b)

	u	$\bar{V}$	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$	$D[d]$	$D[e]$	$D[f]$	$D[g]$	$D[h]$	$D[i]$	$D[j]$
0		$\{b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\underline{1}$
1	j	$\{b, c, d, e, f, g, h, i\}$	0	$\underline{2}$	4	∞	2	∞	4	3	2	1
2	b	$\{c, d, e, f, g, h, i\}$	0	2	3	∞	$\underline{2}$	∞	4	3	2	1
3	e	$\{c, d, f, g, h, i\}$	0	2	3	4	2	5	4	3	$\underline{2}$	1
4	i	$\{c, d, f, g, h\}$	0	2	$\underline{3}$	4	2	5	4	3	2	1
5	c	$\{d, f, g, h\}$	0	2	3	4	2	5	4	$\underline{3}$	2	1
6	h	$\{d, f, g\}$	0	2	3	4	2	5	4	$\underline{3}$	2	1
7	d	$\{f, g\}$	0	2	3	$\underline{4}$	2	5	4	3	2	1
8	g	$\{g\}$	0	2	3	$\underline{4}$	2	5	4	3	2	1
9	f	$\emptyset$	0	2	3	4	2	$\underline{5}$	4	3	2	1

A zatem najkrótsza ścieżka z a do f ma długość $D[f] = 5$. Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 5 = D[f] &= D[e] + 3 = (D[j] + 1) + 3 = ((D[a] + 1) + 1) + 3 = \\ &= (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 5. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki a, j, e, f.

9.62.

1. 0000 $\longrightarrow$ 0001

2. 0000 $\longrightarrow$ 0010
   0001 $\longrightarrow$ 0011

3. 0000 $\longrightarrow$ 0100
   0001 $\longrightarrow$ 0101
   0010 $\longrightarrow$ 0110
   0011 $\longrightarrow$ 0111

4. 0000 $\longrightarrow$ 1000
   0001 $\longrightarrow$ 1001
   0010 $\longrightarrow$ 1010
   0011 $\longrightarrow$ 1011
   0100 $\longrightarrow$ 1100
   0101 $\longrightarrow$ 1101
   0110 $\longrightarrow$ 1110
   0111 $\longrightarrow$ 1111

9.64.

1. $\texttt{1000} \longrightarrow \texttt{0000}$
   $\texttt{1001} \longrightarrow \texttt{0001}$
   $\texttt{1010} \longrightarrow \texttt{0010}$
   $\texttt{1011} \longrightarrow \texttt{0011}$
   $\texttt{1100} \longrightarrow \texttt{0100}$
   $\texttt{1101} \longrightarrow \texttt{0101}$
   $\texttt{1110} \longrightarrow \texttt{0110}$
   $\texttt{1111} \longrightarrow \texttt{0111}$

2. $\texttt{0100} \longrightarrow \texttt{0000}$
   $\texttt{0101} \longrightarrow \texttt{0001}$
   $\texttt{0110} \longrightarrow \texttt{0010}$
   $\texttt{0111} \longrightarrow \texttt{0011}$

3. $\texttt{0010} \longrightarrow \texttt{0000}$
   $\texttt{0011} \longrightarrow \texttt{0001}$

4. $\texttt{0001} \longrightarrow \texttt{0000}$

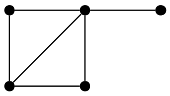
9.65.

a) TAK
b) NIE
c) TAK
d) NIE
e) TAK
f) NIE
g) TAK
h) TAK
i) NIE
j) TAK
k) NIE
l) NIE
m) NIE

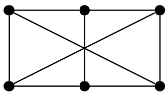
Wskazówki dla Prowadzących

9.2.

a)

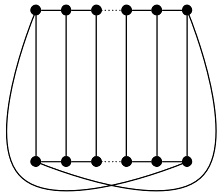


b)

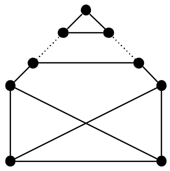


9.3.

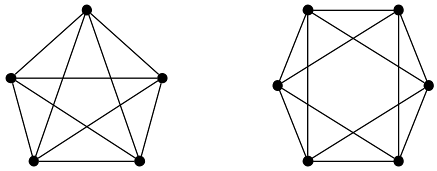
a)



b)



c)



$n = 5$ (nieparzyste) $n = 6$ (parzyste)

9.10.

a) $n = k$ oraz $n \geq k + 2$.

Przypadek $n = k$: po prostu k izolowanych wierzchołków.
Przypadek $n = k+1$ niemożliwy, bo ten „dodatkowy" jeden wierzchołek też byłby izolowany — sprzeczność z liczbą izolowanych wierzchołków równą k.
Przypadek $n \geq k + 2$: k izolowanych wierzchołków i np. graf pełny $K_{n-k\geq 2}$ na pozostałych.

b) k parzyste: $n \geq k$;
$k = 1$: $n \geq 4$ oraz $k \geq 3$ nieparzyste: $n \geq k + 1$.

Przypadek k parzyste: po prostu $k/2$ izolowanych krawędzi, a pozostałe wierzchołki izolowane.
Przypadek k nieparzyste: $n = k$ niemożliwe, bo wtedy suma stopni nieparzysta.
Przypadek $k = 1$ oraz $n = 2, 3$: niemożliwe — – sprzeczność z liczbą wiszących wierzchołków.
Przypadek $k = 1$ oraz $n \geq 4$: liść podpięty do wierzchołka grafu pełnego $K_{n-1\geq 3}$.
Przypadek $k = 3$ oraz $n \geq k + 1$: k liści podpiętych do jednego wierzchołka, pozostałe wierzchołki izolowane.

9.11.

a) $n = k$: $\min = \max = 0$.

$n \geq k + 2$:

- $\min = \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$.
  W zależności od parzystości $n - k$, mamy albo $\frac{n-k}{2} = \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$ krawędzi izolowanych, albo $\frac{n-k-3}{2}$ krawędzie izolowane, a pozostałe 3 wierzchołki tworzą 3-wierzchołkową ścieżkę, co daje $\frac{n-k-3}{2} + 2 = \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$.

- $\max = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.
  k izolowanych wierzchołków i graf pełny $K_{n-k\geq 2}$ na pozostałych.

b) k parzyste, $n \geq k$:

- $\min = \frac{k}{2}$: bo $\frac{k}{2}$ izolowanych krawędzi, pozostałe wierzchołki izolowane.
- $n = k$: $\max = \frac{k}{2}$ — bo możliwe tylko $\frac{k}{2}$ izolowanych krawędzi.

  $n \geq k+1$: $\max = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.
  Jeśli $n = k+1$, to gwiazda o k liściach i k krawędziach.
  Jeśli $n \geq k+2$, to dzielimy liście na dwie dowolne grupy i podpinamy je do dwóch różnych wierzchołków pełnego grafu na $n-k$ wierzchołkach, otrzymując liczbą krawędzi $k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

  W obu przypadkach $m = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$

$k = 1$, $n \geq 4$:

- $\min = 4$: trójkąt K_3 z dołączonym liściem, pozostałe wierzchołki izolowane.
- $\max = 1 + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$: graf pełny $K_{n-1\geq 3}$ z dołączonym liściem.

$k \geq 3$ nieparzyste, $n \geq k+1$:

- $\min = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$.
  Podpinamy 3 liście do pojedynczego wierzchołka, pozostałe $k-3$ liście parujemy, a reszta $n-k$ wierzchołków jest izolowanych. Otrzymujemy $3 + \frac{k-3}{2} = \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ krawędzi.

- $\max = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. (Analogicznie jak w przypadku parzystego k.)
  Jeśli $n = k+1$, to gwiazda o k liściach i k krawędziach.
  Jeśli $n \geq k+2$, to dzielimy liście na dwie dowolne grupy i podpinamy je do dwóch różnych wierzchołków pełnego grafu na $n-k$ wierzchołkach, otrzymując liczbą krawędzi $k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$.

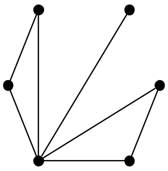
  W obu przypadkach $m = k + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$

9.13.

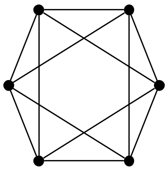
a) Cykl C_5.
b) Cykl C_5 z jedną cięciwą/przekątną.
c) Graf pełny K_4 z dołączonym liściem.

9.15.

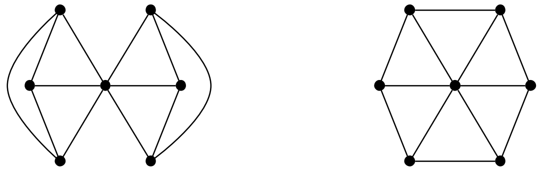
a)



b)



9.22.



9.25. Np. długie ścieżki z dołączonym w „zasadniczo różnym” miejscu dodatkowym liściem — w obu przypadkach ciąg stopni $(3, 2, 2, \ldots, 2, 1, 1, 1)$, a drzewa nie są izomorficzne.

9.47. Np. graf pełny K_{n-1}, gdzie wierzchołki mają etykiety $1, 2, \ldots, n-1$, z dołączonym n-tym wierzchołkiem o etykiecie n do wierzchołka o etykiecie 1 oraz 2. Czas działania: musimy na pewno przeglądnąć wszystkie permutacje zbioru $\{2, \ldots, n-1\}$ zanim algorytm rozpatrzy kolejność $1, n, \ldots$ i chwilę potem znajdzie drogę Hamiltona.