Algorytmiczna teoria grafów
Przepływy w sieciach

hanna.furmanczyk@inf.ug.edu.pl

Sieć przepływowa

Siecią przepływową $S = (V, E, c)$ nazywamy graf zorientowany $G = (V, E)$, w którym każdy łuk $(u, v) \in E$ ma określoną przepustowość $c(u, v) \geq 0$. Wyróżniamy dwa wierzchołki: źródło s oraz ujście t, $s \neq t$.

Sieć przepływowa

Siecią przepływową $S = (V, E, c)$ nazywamy graf zorientowany $G = (V, E)$, w którym każdy łuk $(u, v) \in E$ ma określoną przepustowość $c(u, v) \geq 0$. Wyróżniamy dwa wierzchołki: źródło s oraz ujście t, $s \neq t$.

- przesyłanie różnego rodzaju towarów (materiałów, informacji, środków)
- przepływ cieczy, prądu, danych w sieci itp.

Przepływ

Przepływem w sieci $S = (V, E, c)$ nazywamy funkcję $f : E \Rightarrow R$ taką, że

$$\begin{array}{ll} 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v) & \text{dla każdego } (u,v) \in E, \\ \sum_{z \in V} f(v,z) - \sum_{u \in V} f(u,v) = 0 & \text{dla każdego } v \in V \setminus \{s,t\}. \end{array}$$

Przykład

Przepływ

Przepływem w sieci $S = (V, E, c)$ nazywamy funkcję $f : E \Rightarrow R$ taką, że

$$\begin{array}{ll} 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v) & \text{dla każdego } (u,v) \in E, \\ \sum_{z \in V} f(v,z) - \sum_{u \in V} f(u,v) = 0 & \text{dla każdego } v \in V \backslash \{s,t\}. \end{array}$$

Wartość przepływu

Wartością przepływu f w sieci $S = (V, E, c)$ ze źródłem s oraz ujściem t nazywamy wielkość:

$$|f| = \sum_{z \in V} f(s,z) - \sum_{u \in V} f(u,s).$$

Przykład

- maksymalny przepływ (wąskie gardło sieci)
- najtańszy przepływ

Pojęcie przekroju

Niech $X \subseteq V$ będzie podzbiorem wierzchołków sieci $S = (V, E, c)$ takim, że $s \in X$ oraz $t \notin X$. *Przekrojem* $(X, V \setminus X)$ w sieci $S = (V, E, c)$ oddzielającym źródło s od ujścia t nazywamy zbiór łuków $(u, v) \in E$, takich że $u \in X$ oraz $v \in V \setminus X$. Przepustowością przekroju $(X, V \setminus X)$, to wielkość

$$c(X, V \setminus X) = \sum_{(u,v) \in (X, V \setminus X)} c(u, v).$$

Przykład

Przekrój minimalny

Przekrojem minimalnym nz przekrój, który ma najmniejszą przepustowość spośród wszystkich przekrojów pomiędzy źródłem s i ujściem t.

Przekrój minimalny

Przekrojem minimalnym nz przekrój, który ma najmniejszą przepustowość spośród wszystkich przekrojów pomiędzy źródłem s i ujściem t.

Twierdzenie

Wartość dowolnego przepływu f w sieci $S = (V, E, c)$ nie jest większa niż przepustowość dowolnego przekroju $(X, V \backslash X)$ pomiędzy źródłem s i ujściem t

$$|f| \leq c(X, V \backslash X).$$

Dowód

Twierdzenie Forda-Fulkersona

Wartość maksymalnego przepływu w sieci $S = (V, E, c)$ jest równa przepustowości minimalnego przekroju pomiędzy źródłem s i ujściem t.

Twierdzenie Forda-Fulkersona

Wartość maksymalnego przepływu w sieci $S = (V, E, c)$ jest równa przepustowości minimalnego przekroju pomiędzy źródłem s i ujściem t.

Dowód

... schemat Forda-Fulkersona ...

Ścieżki powiększające

Dla sieci $S = (V, E, c)$ i ustalonego przepływu f definiujemy *sieć pomocniczą* $S_f = (V, E_f, c_f)$, w której:

Ścieżki powiększające

Dla sieci $S = (V, E, c)$ i ustalonego przepływu f definiujemy *sieć pomocniczą* $S_f = (V, E_f, c_f)$, w której:

- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) < c(u, v)$, to $(u, v) \in E_f$ i $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ [łuki zgodne z przepływem: E^+]

Ścieżki powiększające

Dla sieci $S = (V, E, c)$ i ustalonego przepływu f definiujemy *sieć pomocniczą* $S_f = (V, E_f, c_f)$, w której:

- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) < c(u, v)$, to $(u, v) \in E_f$ i $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ [łuki zgodne z przepływem: E^+]
- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) > 0$, to $(v, u) \in E_f$ i $c_f(v, u) = f(u, v)$ [łuki przeciwne: E^-]

Ścieżki powiększające

Dla sieci $S = (V, E, c)$ i ustalonego przepływu f definiujemy *sieć pomocniczą* $S_f = (V, E_f, c_f)$, w której:

- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) < c(u, v)$, to $(u, v) \in E_f$ i $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ [łuki zgodne z przepływem: E^+]
- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) > 0$, to $(v, u) \in E_f$ i $c_f(v, u) = f(u, v)$ [łuki przeciwne: E^-]

Po znalezieniu w sieci S_f *ścieżki powiększającej* P można zwiększyć przepływ w sieci S o wielkość:

$$\delta = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in E^+(P) \cup E^-(P)\}.$$

Ścieżki powiększające

Dla sieci $S = (V, E, c)$ i ustalonego przepływu f definiujemy *sieć pomocniczą* $S_f = (V, E_f, c_f)$, w której:

- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) < c(u, v)$, to $(u, v) \in E_f$ i $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ [łuki zgodne z przepływem: E^+]
- jeżeli $(u, v) \in E$ i $f(u, v) > 0$, to $(v, u) \in E_f$ i $c_f(v, u) = f(u, v)$ [łuki przeciwne: E^-]

Po znalezieniu w sieci S_f *ścieżki powiększającej* P można zwiększyć przepływ w sieci S o wielkość:

$$\delta = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in E^+(P) \cup E^-(P)\}.$$

Nowy przepływ f':

$$f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) + \delta & \text{gdy } (u, v) \in E^+(P) \\ f(u, v) - \delta & \text{gdy } (v, u) \in E^-(P) \\ f(u, v) & \text{dla pozostałych łuków} \end{cases}$$

Wyznaczanie maksymalnego przepływu w sieci $S = (V, E, c)$

begin
for $(u, v) \in E$ **do** $f(u, v) := 0$;
    while w sieci S_f istnieje ścieżka powiększająca P z s do t **do**
        zmodyfikuj przepływ f zgodnie ze wzorem na f'
    end while
end $\{f$ jest szukanym maksymalnym przepływem$\}$

Wyznaczanie maksymalnego przepływu w sieci $S = (V, E, c)$

begin
for $(u, v) \in E$ **do** $f(u, v) := 0$;
  while w sieci S_f istnieje ścieżka powiększająca P z s do t **do**
    zmodyfikuj przepływ f zgodnie ze wzorem na f'
  end while
end $\{f$ jest szukanym maksymalnym przepływem$\}$

Przykłady

Uwaga: konstrukcja algorytmu musi gwarantować, że procedura nie zakończy się zbyt wcześnie, tzn. wtedy, kiedy nie można wskazać ścieżki powiększającej, a nie mamy jeszcze przelewu maksymalnego.

Uwaga: konstrukcja algorytmu musi gwarantować, że procedura nie zakończy się zbyt wcześnie, tzn. wtedy, kiedy nie można wskazać ścieżki powiększającej, a nie mamy jeszcze przelewu maksymalnego.

Niezbędny jest systematyczny sposób generowania ścieżek powiększających - metoda cechowania wierzchołków.

Uwaga: konstrukcja algorytmu musi gwarantować, że procedura nie zakończy się zbyt wcześnie, tzn. wtedy, kiedy nie można wskazać ścieżki powiększającej, a nie mamy jeszcze przelewu maksymalnego.

Niezbędny jest systematyczny sposób generowania ścieżek powiększających - metoda cechowania wierzchołków.

wierzchołek j - cechy postaci (i^+, f_j) lub (i^-, f_j)
i - numer wierzchołka poprzedzającego w ścieżce powiększającej
f_j - wielkość przepływu do wierzchołka j
$+$ - poruszamy się zgodnie z orientacją łuku
$-$ - poruszamy się w kierunku przeciwnym

Uwaga: konstrukcja algorytmu musi gwarantować, że procedura nie zakończy się zbyt wcześnie, tzn. wtedy, kiedy nie można wskazać ścieżki powiększającej, a nie mamy jeszcze przelewu maksymalnego.

Niezbędny jest systematyczny sposób generowania ścieżek powiększających - metoda cechowania wierzchołków.

wierzchołek j - cechy postaci (i^+, f_j) lub (i^-, f_j)
i - numer wierzchołka poprzedzającego w ścieżce powiększającej
f_j - wielkość przepływu do wierzchołka j
$+$ - poruszamy się zgodnie z orientacją łuku
$-$ - poruszamy się w kierunku przeciwnym

(i^+, f_j): $\min_{(i,j)\in E}\{c_f(i,j), v_i\}$
(i^-, f_j): $\min_{(j,i)\in E}\{c_f(j,i), v_i\}$

Algorytm FF Edmondsa-Karpa

1. Krok początkowy

Algorytm FF Edmondsa-Karpa

1. Krok początkowy
   - przepływ zerowy dla każdego łuku

Algorytm FF Edmondsa-Karpa

1. Krok początkowy
   - przepływ zerowy dla każdego łuku
   - inicjalizacja kolejki L

Algorytm FF Edmondsa-Karpa

1. Krok początkowy
   - przepływ zerowy dla każdego łuku
   - inicjalizacja kolejki L
   - ocechowanie wierzchołka s: $(-, \infty)$

Algorytm FF Edmondsa-Karpa

1. Krok początkowy
   - przepływ zerowy dla każdego łuku
   - inicjalizacja kolejki L
   - ocechowanie wierzchołka s: $(-, \infty)$
2. Cechowanie wierzchołków
   $L \leftarrow s$

$L = \emptyset$ idź do punktu 4

$L \neq \emptyset$ i - wierzchołek pobrany z L
Cechujemy wierzchołki osiągalne z i - po łuku nienasyconym z E^+: cecha (i^+, v_j); po łuku z E^-: cecha (i^-, v_j). $L \leftarrow j$

$t \in L$ Idź do kroku 3, w przeciwnym przypadku wykonaj punkt 2.

Algorytm FF Edmondsa-Karpa cd.

3. Powiększ przepływ o wartość v_t - startując z t i korzystając z cech wierzchołków; usuń cechy wierzchołkom za wyjątkiem s i idź do kroku 2.

Algorytm FF Edmondsa-Karpa cd.

3. Powiększ przepływ o wartość v_t - startując z t i korzystając z cech wierzchołków; usuń cechy wierzchołkom za wyjątkiem s i idź do kroku 2.
4. Otrzymany przepływ jest maksymalny. Przekrój minimalny: X - wierzchołki ocechowane w kroku 3, $V \setminus X$