Algorytmiczna teoria grafów

Grafy planarne

dr Hanna Furmańczyk

Definicja

Mówimy, że graf jest *planarny*, jeżeli można przedstawić go na płaszczyźnie w taki sposób, że:

- wierzchołki grafu są reprezentowane przez punkty na płaszczyźnie,
- krawędzie grafu są reprezentowane przez krzywe łączące wierzchołki,
- krawędzie grafu nie przecinają się, z wyjątkiem wierzchołków grafu.

Taką reprezentację grafu planarnego nazywamy *grafem płaskim*.

Przykład: K_4.

Twierdzenie Eulera

W grafie płaskim $G = (V, E)$ o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach i c składowych spójności zachodzi

$$n - m + f = c + 1.$$

Twierdzenie Eulera

W grafie płaskim $G = (V, E)$ o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach i c składowych spójności zachodzi

$$n - m + f = c + 1.$$

Wniosek 1

W spójnym grafie płaskim formuła Eulera ma postać:

$$n - m + f = 2.$$

Twierdzenie Eulera

W grafie płaskim $G = (V, E)$ o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach i c składowych spójności zachodzi

$$n - m + f = c + 1.$$

Wniosek 1

W spójnym grafie płaskim formuła Eulera ma postać:

$$n - m + f = 2.$$

Wniosek 2

Liczba ścian zależy jedynie od liczby wierzchołków, krawędzi i składowych spójności

Twierdzenie Eulera

W grafie płaskim $G = (V, E)$ o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach i c składowych spójności zachodzi

$$n - m + f = c + 1.$$

Wniosek 1

W spójnym grafie płaskim formuła Eulera ma postać:

$$n - m + f = 2.$$

Wniosek 2

Liczba ścian zależy jedynie od liczby wierzchołków, krawędzi i składowych spójności $\Rightarrow$ w każdej reprezentacji płaskiej musi być taka sama!

Twierdzenie Eulera

W grafie płaskim $G = (V, E)$ o n wierzchołkach, m krawędziach i f ścianach i c składowych spójności zachodzi

$$n - m + f = c + 1.$$

Wniosek 1

W spójnym grafie płaskim formuła Eulera ma postać:

$$n - m + f = 2.$$

Wniosek 2

Liczba ścian zależy jedynie od liczby wierzchołków, krawędzi i składowych spójności $\Rightarrow$ w każdej reprezentacji płaskiej musi być taka sama!

Dowód tw. Eulera

Indukcja względem liczby krawędzi.

Twierdzenie

Jeżeli G jest prostym spójnym grafem płaskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, to $m \leq 3n - 6$.

Własności

Twierdzenie

Jeżeli G jest prostym spójnym grafem płaskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, to $m \leq 3n - 6$.

Dowód

- każda krawędź należy do maksymalnie 2 ścian,
- każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 3 krawędzie.

$$3f \leq 2m$$

Własności

Twierdzenie

Jeżeli G jest prostym spójnym grafem płaskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, to $m \leq 3n - 6$.

Dowód

- każda krawędź należy do maksymalnie 2 ścian,
- każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 3 krawędzie.

$$3f \leq 2m \qquad (+ \text{ wzór Eulera})$$

Własności

Twierdzenie

Jeżeli G jest prostym spójnym grafem płaskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, to $m \leq 3n - 6$.

Dowód

- każda krawędź należy do maksymalnie 2 ścian,
- każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 3 krawędzie.

$$3f \leq 2m \qquad (+ \text{ wzór Eulera})$$

Wniosek

Graf K_5 nie jest grafem planarnym.

Własności

Twierdzenie

Jeżeli G jest prostym spójnym grafem płaskim o $n \geq 3$ wierzchołkach, to $m \leq 3n - 6$.

Dowód

- każda krawędź należy do maksymalnie 2 ścian,
- każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 3 krawędzie.

$$3f \leq 2m \qquad (+ \text{ wzór Eulera})$$

Wniosek

Graf K_5 nie jest grafem planarnym.

Twierdzenie

Każdy prosty graf planarny zawiera wierzchołek stopnia ≤ 5.

Wniosek

Graf G o $n \geq 3$ wierzchołkach jest maksymalnie płaski wtedy i tylko wtedy gdy $m = 3n - 6$.

Wniosek

Graf G o $n \geq 3$ wierzchołkach jest maksymalnie płaski wtedy i tylko wtedy gdy $m = 3n - 6$.

Twierdzenie

$K_{3,3}$ nie jest grafem planarnym.

Wniosek

Graf G o $n \geq 3$ wierzchołkach jest maksymalnie płaski wtedy i tylko wtedy gdy $m = 3n - 6$.

Twierdzenie

$K_{3,3}$ nie jest grafem planarnym.

Dowód

Wniosek

Graf G o $n \geq 3$ wierzchołkach jest maksymalnie płaski wtedy i tylko wtedy gdy $m = 3n - 6$.

Twierdzenie

$K_{3,3}$ nie jest grafem planarnym.

Dowód

Wniosek

Żaden graf planarny nie zawiera jako podgrafu grafu K_5 ani grafu $K_{3,3}$.

Definicja

Dwa grafy są *homeomorficzne* jeśli mogą być otrzymane z tego samego grafu poprzez umieszczenie nowych wierzchołków stopnia dwa na jego krawędziach (krawędź zastępowana jest ścieżką).

Definicja

Dwa grafy są *homeomorficzne* jeśli mogą być otrzymane z tego samego grafu poprzez umieszczenie nowych wierzchołków stopnia dwa na jego krawędziach (krawędź zastępowana jest ścieżką).

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub z $K_{3,3}$.

Definicja

Dwa grafy są *homeomorficzne* jeśli mogą być otrzymane z tego samego grafu poprzez umieszczenie nowych wierzchołków stopnia dwa na jego krawędziach (krawędź zastępowana jest ścieżką).

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 lub z $K_{3,3}$.

Przykład

Definicja

Graf prosty G_1 jest *ściągalny* do G_2, jeżeli G_2 można otrzymać z G_1, wykonując sekwencję operacji elementarnych, z których każda składa się z następujących etapów:

- krawędź $e = \{u, v\}$ usuwamy z grafu G_1 i utożsamiamy wierzchołki u oraz v,
- jeżeli w wyniku tego utożsamienia powstaną krawędzie wielokrotne, to ograniczamy się do pojedynczego połączenia.

Definicja

Graf prosty G_1 jest *ściągalny* do G_2, jeżeli G_2 można otrzymać z G_1, wykonując sekwencję operacji elementarnych, z których każda składa się z następujących etapów:

- krawędź $e = \{u, v\}$ usuwamy z grafu G_1 i utożsamiamy wierzchołki u oraz v,
- jeżeli w wyniku tego utożsamienia powstaną krawędzie wielokrotne, to ograniczamy się do pojedynczego połączenia.

Twierdzenie Wagnera

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy. gdy nie zawiera grafu ściągalnego do K_5 ani do $K_{3,3}$.

- zastosowanie

- zastosowanie
- tw. Kuratowskiego i Wagnera nie dają efektywnego obliczeniowo algorytmu

Testowanie planarności

- zastosowanie
- tw. Kuratowskiego i Wagnera nie dają efektywnego obliczeniowo algorytmu
- algorytmy o złożoności $O(n)$, np.
  John E. Hopcroft and Robert Endre Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.

Testowanie planarności

- zastosowanie
- tw. Kuratowskiego i Wagnera nie dają efektywnego obliczeniowo algorytmu
- algorytmy o złożoności $O(n)$, np.
  John E. Hopcroft and Robert Endre Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.
- najlepszy dotąd wynik: $O(\log^3 n)$:
  Holm, Jacob, and Eva Rotenberg. Fully-dynamic Planarity Testing in Polylogarithmic Time. arXiv preprint arXiv:1911.03449 (2019).

Testowanie planarności

- zastosowanie
- tw. Kuratowskiego i Wagnera nie dają efektywnego obliczeniowo algorytmu
- algorytmy o złożoności $O(n)$, np.
  John E. Hopcroft and Robert Endre Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.
- najlepszy dotąd wynik: $O(\log^3 n)$:
  Holm, Jacob, and Eva Rotenberg. Fully-dynamic Planarity Testing in Polylogarithmic Time. arXiv preprint arXiv:1911.03449 (2019).
- programy do planaryzacji grafu, np. LEDA
  http://www.algorithmic-solutions.info/leda_guide/GraphAlgorithms.html

Grubość grafu

Definicja

Grubością grafu G, $t(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę rozłącznych podzbiorów zbioru krawędzi, takich że krawędzie każdego z tych podzbiorów rozpięte na zbiorze wierzchołków grafu tworzą graf planarny.

Grubość grafu

Definicja

Grubością grafu G, $t(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę rozłącznych podzbiorów zbioru krawędzi, takich że krawędzie każdego z tych podzbiorów rozpięte na zbiorze wierzchołków grafu tworzą graf planarny.

Grubość każdego grafu planarnego wynosi 1.

Grubość grafu

Definicja

Grubością grafu G, $t(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę rozłącznych podzbiorów zbioru krawędzi, takich że krawędzie każdego z tych podzbiorów rozpięte na zbiorze wierzchołków grafu tworzą graf planarny.

Grubość każdego grafu planarnego wynosi 1.

G - graf o co najmniej 3 wierzchołkach

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

Definicja

Grubością grafu G, $t(G)$, nazywamy najmniejszą liczbę rozłącznych podzbiorów zbioru krawędzi, takich że krawędzie każdego z tych podzbiorów rozpięte na zbiorze wierzchołków grafu tworzą graf planarny.

Grubość każdego grafu planarnego wynosi 1.

G - graf o co najmniej 3 wierzchołkach

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

wyliczenie $t(G)$ - trudne obliczeniowo dla dowolnego G

Wybrane klasy grafów

$$t(K_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor & n \neq 9, 10 \\ 3 & n = 9, 10 \end{cases}$$

$$t(K_{n,n}) = \left\lceil \frac{n+5}{4} \right\rceil$$

Własności grafów planarnych cd.

Twierdzenie (Wernicke, 1904)

Jeżeli graf planarny ma minimalny stopień równy 5, $\delta(G) = 5$, to zawiera krawędź, której oba wierzchołki końcowe mają stopień 5 lub krawędź, której jeden wierzchołek końcowy ma stopień 5, a drugi 6.

Własności grafów planarnych cd.

Twierdzenie (Wernicke, 1904)

Jeżeli graf planarny ma minimalny stopień równy 5, $\delta(G) = 5$, to zawiera krawędź, której oba wierzchołki końcowe mają stopień 5 lub krawędź, której jeden wierzchołek końcowy ma stopień 5, a drugi 6.

Dowód

'*discharging method*'

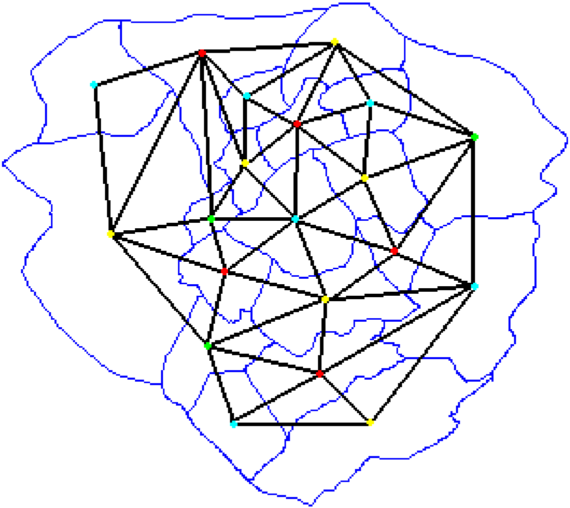
Trochę historii

- 1852 - Francis Guthrie (były student Augustusa de Morgana) kolorując mapę Anglii, zauważył, że cztery kolory wystarczą, by każde dwa sąsiadujące hrabstwa różniły się barwą.

Twierdzenie o kolorowaniu map

Każdą mapę polityczną, na płaszczyźnie lub sferze, można pokolorować czterema kolorami tak, aby każde dwa kraje mające wspólną granicę (nie tylko wspólny wierzchołek) miały inne kolory (zakładamy, że wszystkie państwa są spójne terytorialnie).

Dualność



graf planarny G vs graf dualny G^*

Dualność cd.

Własności

- Graf dualny grafu planarnego jest zawsze grafem planarnym.

Dualność cd.

Własności

- Graf dualny grafu planarnego jest zawsze grafem planarnym.
- Jeśli G jest spójnym grafem płaskim, to G^{**} jest izomorficzny z G.

Dualność cd.

Własności

- Graf dualny grafu planarnego jest zawsze grafem planarnym.
- Jeśli G jest spójnym grafem płaskim, to G^{**} jest izomorficzny z G.
- Grafy dualne nie są określone jednoznacznie — ten sam graf może mieć nieizomorficzne grafy dualne - PRZYKŁAD!

Twierdzenie o czterech barwach

Dla każdego skończonego grafu planarnego $G = (V, E)$ istnieje funkcja $k\colon V \to \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, taka że $\forall_{\{k_1,v_2\}\in E} k(v_1) \neq k(v_2)$, czyli możliwe jest przypisanie każdemu z jego wierzchołków jednej z czterech liczb 1, 2, 3 i 4 w taki sposób, aby żadne sąsiednie wierzchołki nie miały przyporządkowanej tej samej liczby.

Trochę historii cd.

- 1879 - pierwszy ''dowód'', Alfred Kempe

Trochę historii cd.

- 1879 - pierwszy "dowód", Alfred Kempe
- 1890 - Percy Heawood wytyka błąd w rozumowaniu Kempego. Tw.: *Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.*

Trochę historii cd.

- 1879 - pierwszy "dowód", Alfred Kempe
- 1890 - Percy Heawood wytyka błąd w rozumowaniu Kempego. Tw.: *Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.*
- 1977 - dowód wspomagany komputerowy, Percy Heawood, Wolfgang Haken, John Koch - zbiór 1936 red. konfiguracji

Trochę historii cd.

- 1879 - pierwszy "dowód", Alfred Kempe
- 1890 - Percy Heawood wytyka błąd w rozumowaniu Kempego. Tw.: *Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.*
- 1977 - dowód wspomagany komputerowy, Percy Heawood, Wolfgang Haken, John Koch - zbiór 1936 red. konfiguracji
- 1994 - Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas, bardziej strukturalny dowód

Trochę historii cd.

- 1879 - pierwszy "dowód", Alfred Kempe
- 1890 - Percy Heawood wytyka błąd w rozumowaniu Kempego. Tw.: *Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.*
- 1977 - dowód wspomagany komputerowy, Percy Heawood, Wolfgang Haken, John Koch - zbiór 1936 red. konfiguracji
- 1994 - Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas, bardziej strukturalny dowód
- 2004 - *Georges Gonthier trafia na czołówki czasopism naukowych ogłaszając, że raz na zawsze twierdzenie o czterech kolorach staje się twierdzeniem. Aby tego dokonać, użył narzędzia Coq (Kogut), którego poprawność została potwierdzona. To jedyne narzędzie, które pozwala sprawdzić poprawność kroku indukcyjnego napisanego w jego własnym języku. Kogut nawet sam sprawdził, czy w jego kodzie nie ma błędów!*(https://anitix.wordpress.com/2010/12/08/cztery-kolory-albo-nic/)

Twierdzenie

Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.

Twierdzenie

Każdy graf planarny można pokolorować 5 kolorami.

Dowód

Indukcja względem liczby wierzchołków.