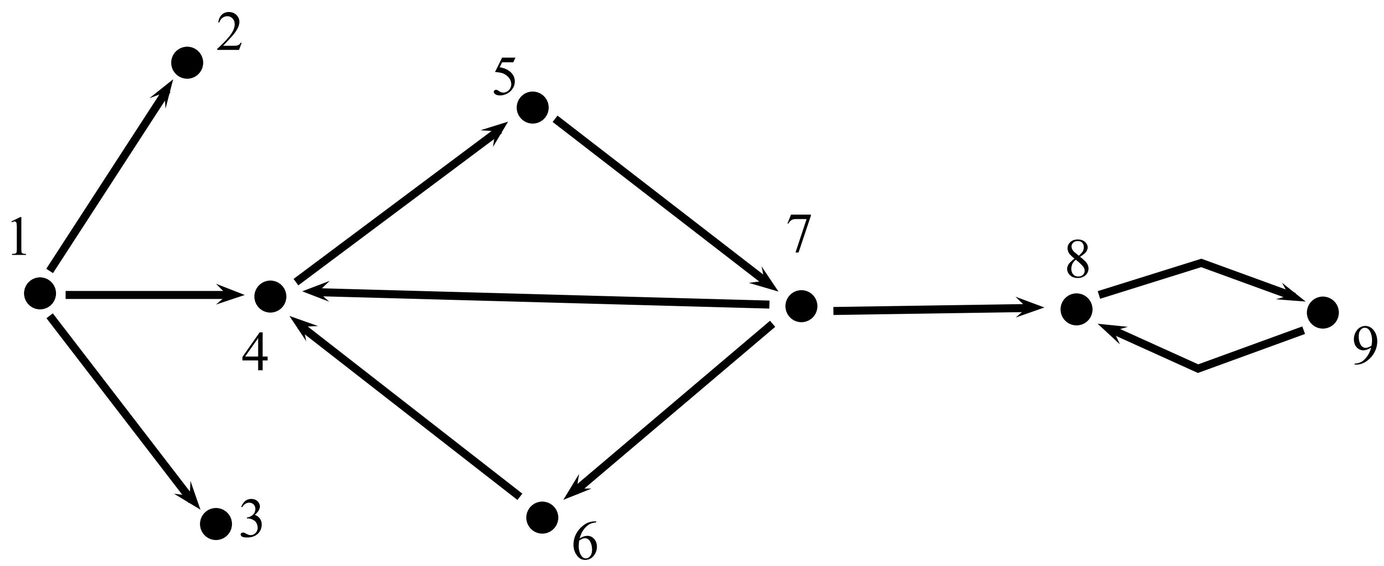
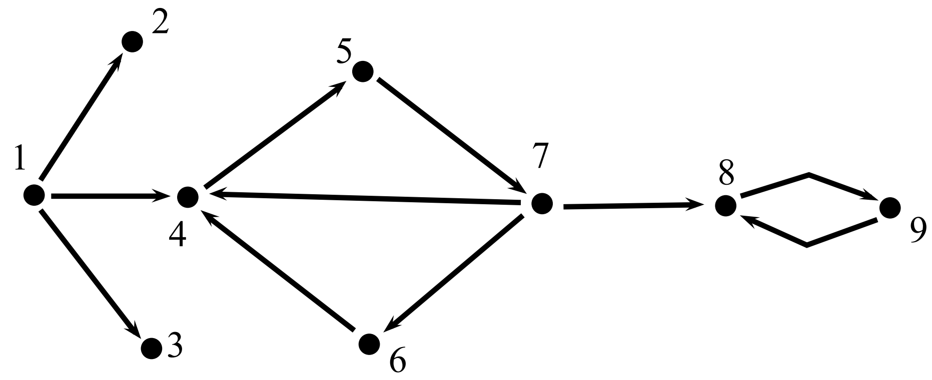
GRAFY SKIEROWANE

Definicja 6.1.

Grafem skierowanym (*digrafem*) nazywamy każdą parę postaci $D = (V, A, \zeta)$, gdzie V oraz A są zbiorami skończonymi, $V \neq \emptyset$, $V \cap A = \emptyset$, a $\zeta \colon A \to V \times V$ jest funkcją.



* Elementy zbioru V to *wierzchołki* digrafu D, a liczba $n \stackrel{\mathtt{df}}{=} |V|$ to jego *rząd*; elementy zbioru A to *łuki* (*krawędzie skierowane*) digrafu D, a liczba $m \stackrel{\mathtt{df}}{=} |A|$ to jego *rozmiar*.



* Relacja

$$I \stackrel{\mathtt{df}}{=} \{(v, a) \in V \times A\colon\ \zeta(a) \in \{(u, v), (v, u)\} \text{ dla pewnego } u \in V\}$$

to relacja *incydencji*; jeżeli $\zeta(a) = (u, v)$, to mówimy, że:

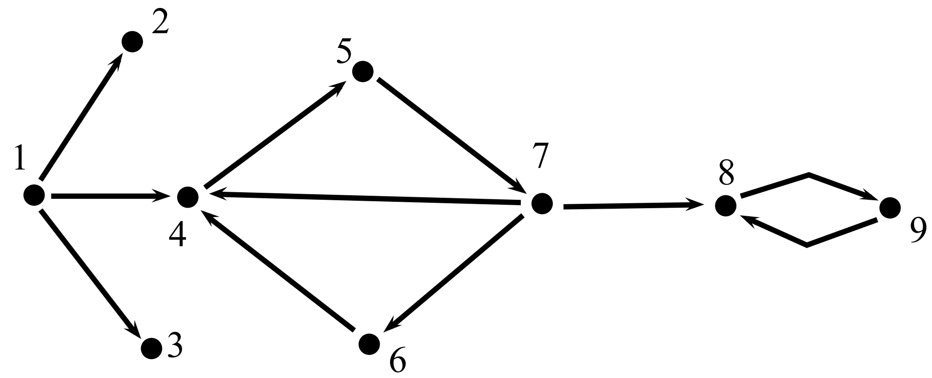
– wierzchołki u, v są *incydentne* z łukiem a
(łuk a jest *incydentny* z wierzchołkami u, v);

– łuk a *łączy* wierzchołek u z wierzchołkiem v w digrafie D
(łuk a *wychodzi* z wierzchołka u i *wchodzi* do wierzchołka v);

– wierzchołki u, v *sąsiadują* (są *sąsiednie*) w digrafie D.

* Liczba łuków, które łączą te same wierzchołki, co dany łuk $a \in A$, to jego *krotność*; łuki dzielą się na *pętle*, łuki *wielokrotne* (*równoległe*) i *jednokrotne*.

* Digrafy dzielą się na digrafy *proste* (nie posiadające pętli ani łuków wielokrotnych) i *multidigrafy* (wszystkie pozostałe); digrafy proste postaci (V, A, ζ), gdzie $\zeta \equiv Id_A$, to digrafy *standardowe* (wtedy piszemy po prostu $D = (V, A)$).



$\mathrm{indeg}(4) = 3$

$\mathrm{outdeg}(4) = 1$

1 jest źródłem

2 i 3 są ujściami.

$*$ Wierzchołek, do którego nie wchodzą żadne łuki, nazywamy *źródłem*; wierzchołek, z którego nie wychodzą żadne łuki nazywamy *ujściem*.

$*$ Liczba łuków, które wchodzą do (wychodzą z) wierzchołka $v \in V$, to jego *stopień wejściowy* (*wyjściowy*); oznaczamy go symbolem $\mathrm{indeg}(v)$ $(\mathrm{outdeg}(v))$.

$*$ Formy reprezentacji digrafów są podobne do form reprezentacji grafów nieskierowanych. Rysując digrafy stosujemy się do następujących zasad:

– wierzchołki digrafu przedstawiamy jako punkty na rysunku;

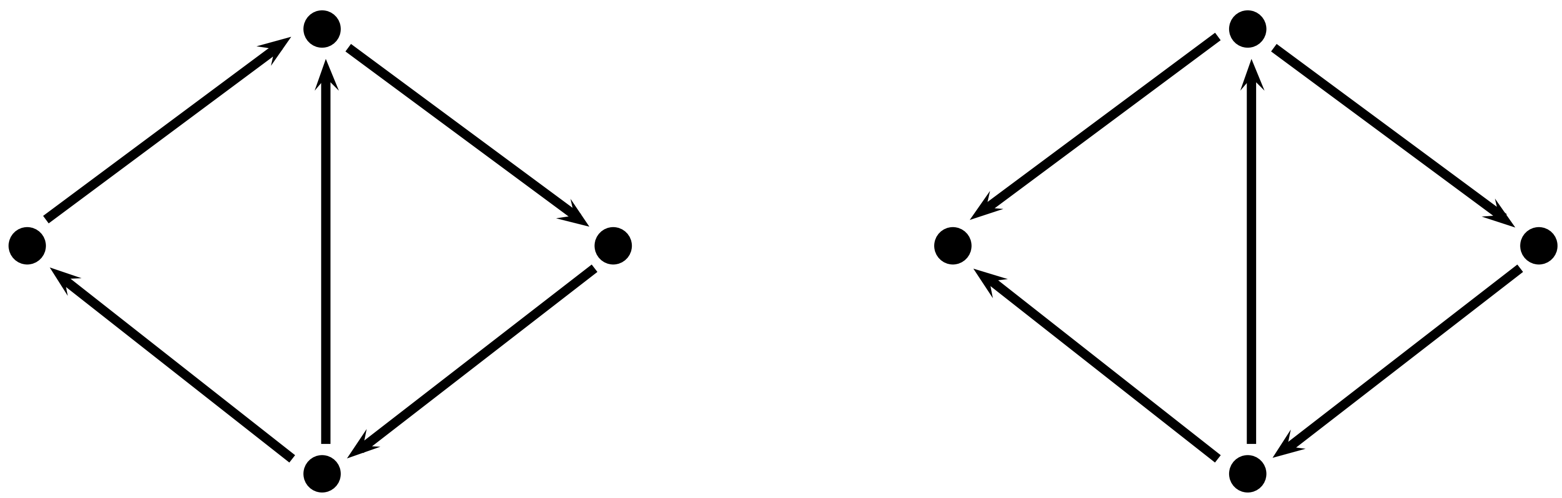
– łuk łączący wierzchołek u z wierzchołkiem v przedstawiamy jako krzywą ze strzałką łączącą punkty reprezentujące wierzchołki u, v; strzałka na krzywej musi być skierowana od u do v;

– żadne dwa różne łuki nie mogą być reprezentowane przez tę samą krzywą; to samo dotyczy wierzchołków – żadne dwa różne wierzchołki nie mogą być reprezentowane przez te same punkty.

Stwierdzenie 6.1. *Jeżeli $D = (V, A)$ jest digrafem o m łukach, to*
$$\sum_{v \in V} \operatorname{indeg}(v) = \sum_{v \in V} \operatorname{outdeg}(v) = m.$$

Definicja 6.2. *Marszrutą* łączącą w digrafie $D = (V, A)$ wierzchołek v_0 z v_k nazywamy każdy taki ciąg $v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_k, v_k$ $(k \in \mathbb{Z}_0)$, że dla każdego $i = 1, 2 \dots, k$ łuk $a_i \in A$ łączy w digrafie D wierzchołek $v_{i-1} \in V$ z wierzchołkiem $v_i \in V$, tj. $a_i = (v_{i-1}, v_i)$.

* Liczba k to *długość* marszruty $v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_k, v_k$; długość marszruty jest równa liczbie łuków do niej należących.
* v_0 to wierzchołek *początkowy*, a v_k to wierzchołek *końcowy* marszruty $v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots,$ $\dots, a_k, v_k$; jeżeli $v_0 = v_k$, to marszruta jest *zamknięta*.
* Marszruta, w której wszystkie łuki są różne, to *łańcuch*.
* Łańcuch, w którym wszystkie wierzchołki (poza co najwyżej początkowym i końcowym) są różne, to *droga* (*ścieżka*); droga zamknięta długości $k > 0$ to *cykl*.



Digraf silnie spójny (z lewej) i digraf, który jest spójny, ale nie jest silnie spójny.

Definicja 6.3. Digraf $D = (V, A)$, w którym dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V$ istnieje marszruta łącząca u z v i marszruta łącząca v z u, to digraf *silnie spójny*.

* Każdy silnie spójny digraf jest (słabo) spójny, ale nie na odwrót.
* Żaden niepusty silnie spójny digraf nie może posiadać ujść ani źródeł.
* Niepusty digraf acykliczny nie może być silnie spójny (bo każdy niepusty silnie spójny digraf zawiera zamknięte marszruty, a każda taka marszruta zawiera cykl).