Algorytmiczna teoria grafów

Klasyczne kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu

dr Hanna Furmańczyk

19 grudnia 2020

Definicja

Pokolorowaniem wierzchołków grafu $G = (V, E)$ k kolorami nazywamy funkcję $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ taką, że $c(u) \neq c(v)$ dla każdej krawędzi $\{u, v\} \in E$. Najmniejsze takie k, dla którego instnieje k-pokolorowanie grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* oznaczamy przez $\chi(G)$.

Definicja

Pokolorowaniem wierzchołków grafu $G = (V, E)$ k kolorami nazywamy funkcję $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ taką, że $c(u) \neq c(v)$ dla każdej krawędzi $\{u, v\} \in E$. Najmniejsze takie k, dla którego instnieje k-pokolorowanie grafu G nazywamy *liczbą chromatyczną* oznaczamy przez $\chi(G)$.

Przykład, zastosowania - tablica

Twierdzenie

Problem k-kolorowania grafu G jest NP-trudnym dla $k \geq 3$.

Twierdzenie

Problem k-kolorowania grafu G jest NP-trudnym dla $k \geq 3$.

redukcja z problemu 3-SAT

Twierdzenie

Problem k-kolorowania grafu G jest NP-trudnym dla $k \geq 3$.

redukcja z problemu 3-SAT

Wielomianowe algorytmy przybliżone, heurystyki, algorytmy wykładnicze.

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$
- powtarzaj aż do skutku:

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$
- powtarzaj aż do skutku:
  - weź wszystkie niepokolorowane wierzchołki sąsiednie do wierzchołków kolorowanych w poprzedniej iteracji

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$
- powtarzaj aż do skutku:
    - weź wszystkie niepokolorowane wierzchołki sąsiednie do wierzchołków kolorowanych w poprzedniej iteracji
    - jeżeli wśród nich żadne dwa nie są połączone krawędzią, to pokoloruj je kolorem innym niż w poprzedniej iteracji

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$
- powtarzaj aż do skutku:
  - weź wszystkie niepokolorowane wierzchołki sąsiednie do wierzchołków kolorowanych w poprzedniej iteracji
  - jeżeli wśród nich żadne dwa nie są połączone krawędzią, to pokoloruj je kolorem innym niż w poprzedniej iteracji
  - w przeciwnym przypadku, 2-pokolorowanie grafu G nie istnieje.

Algorytm 2-kolorowania grafu (wielomianowy)

Dane wejściowe: spójny graf $G = (V, E)$.
Dane wyjściowe: 2-pokolorowanie G lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

- weź dowolny wierzchołek v, $c(v) := 1$
- powtarzaj aż do skutku:
  - weź wszystkie niepokolorowane wierzchołki sąsiednie do wierzchołków kolorowanych w poprzedniej iteracji
  - jeżeli wśród nich żadne dwa nie są połączone krawędzią, to pokoloruj je kolorem innym niż w poprzedniej iteracji
  - w przeciwnym przypadku, 2-pokolorowanie grafu G nie istnieje.

Przykład

Twierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym (spójnym lub nie).

Twierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym (spójnym lub nie).

Obserwacja

$\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pustym (bez żadnej krawędzi).

Twierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym (spójnym lub nie).

Obserwacja

$\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pustym (bez żadnej krawędzi).

Kiedy $\chi(G) = 3$?

Problem trudny. Znane są niektóre klasy grafów 3-chromatycznych

Twierdzenie

$\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest niepustym grafem dwudzielnym (spójnym lub nie).

Obserwacja

$\chi(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grafem pustym (bez żadnej krawędzi).

Kiedy $\chi(G) = 3$?

Problem trudny. Znane są niektóre klasy grafów 3-chromatycznych np. nieparzyste cykle, graf Petersena, koła W_n, gdzie n jest parzyste, ...

Algorytm z nawrotami - złożoność wykładnicza

Dane wejściowe: graf $G = (V, E)$, liczba nat. k.
Dane wyjściowe: pokolorowanie wierzchołków G k kolorami lub informacja, że takie pokolorowanie nie istnieje.

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \dots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu
  - jeżeli uda się pokolorować, to:

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu
  - jeżeli uda się pokolorować, to:
    - sprawdzamy, czy pokolorowano już wszystkie wierzchołki
    - jeżeli 'tak', to 'koniec'
    - jeżeli 'nie', to wkładamy kolejny wierzchołek na stos

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu
  - jeżeli uda się pokolorować, to:
    - sprawdzamy, czy pokolorowano już wszystkie wierzchołki
    - jeżeli 'tak', to 'koniec'
    - jeżeli 'nie', to wkładamy kolejny wierzchołek na stos
  - jeżeli nie uda się pokolorować u, to zdejmujemy u ze stosu, $c(u) := 0$

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu
  - jeżeli uda się pokolorować, to:
    - sprawdzamy, czy pokolorowano już wszystkie wierzchołki
    - jeżeli 'tak', to 'koniec'
    - jeżeli 'nie', to wkładamy kolejny wierzchołek na stos
  - jeżeli nie uda się pokolorować u, to zdejmujemy u ze stosu, $c(u) := 0$
- jeżeli stos jest pusty i nie znaleziono pokolorowania, to nie istnieje pokolorowanie G k kolorami.

Algorytm z nawrotami cd.

- dla każdego $v \in V$: $c(v) := 0$ (0 oznacza *brak koloru*)
- włóż pierwszy wierzchołek na stos
- dopóki stos nie jest pusty, wykonuj:
  - u - wierzchołek na wierzchu stosu
  - próbujemy przypisać do u kolor (spośród $\{1, \ldots, k\}$), który:
    - jest większy od obecnego koloru $c(u)$
    - nie koliduje z kolorami wierzchołków ze stosu
  - jeżeli uda się pokolorować, to:
    - sprawdzamy, czy pokolorowano już wszystkie wierzchołki
    - jeżeli 'tak', to 'koniec'
    - jeżeli 'nie', to wkładamy kolejny wierzchołek na stos
  - jeżeli nie uda się pokolorować u, to zdejmujemy u ze stosu, $c(u) := 0$
- jeżeli stos jest pusty i nie znaleziono pokolorowania, to nie istnieje pokolorowanie G k kolorami.

Przykład

Heurystyki

slajdy - prof. Dereniowski pp.8-17

Oszacowania $\chi(G)$

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

Definicja

Kliką w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór $V' \subseteq V$, że $u, v \in V' \to \{u, v\} inE$. Pojęcie kliki utożsamia się często z podgrafem opartym na takim podzbiorze wierzchołków. Klikę V' w grafie G nz *maksymalną*, jeżeli nie istnieje żadna klika V'' taka, że $V' \subset V''$. *Liczbą klikową* $\omega(G)$ nz rozmiar największej maksymalnej kliki w G.

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

Definicja

Kliką w grafie $G = (V, E)$ nazywamy taki podzbiór $V' \subseteq V$, że $u, v \in V' \to \{u, v\} in E$. Pojęcie kliki utożsamia się często z podgrafem opartym na takim podzbiorze wierzchołków. Klikę V' w grafie G nz *maksymalną*, jeżeli nie istnieje żadna klika V'' taka, że $V' \subset V''$. *Liczbą klikową* $\omega(G)$ nz rozmiar największej maksymalnej kliki w G.

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Oszacowania $\chi(G)$

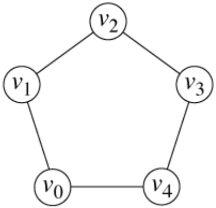
$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

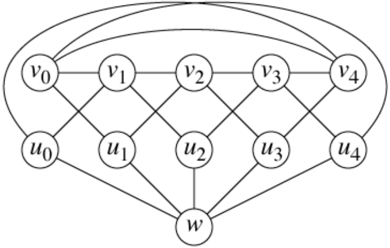
- oszacowanie niedokładne - różnica $\chi(G) - \omega(G)$ może być dowolnie duża - grafy Mycielskiego
- wyznaczenie $\omega(G)$ - problem NP-trudny

Definicja

Niech G bdzie grafem o n wierzchołkach: $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. *Grafem Mycielskiego* $\mu(G)$ zawiera graf G jako izomorficzny podgraf oraz $n+1$ dodatkowych wierzchołków: u_i odpowiadające wierzchołkom v_i oraz wierzchoek w. Każdy wierzchołek u_i jest połączony krawędzią z wierzchołkiem w tak, że tworzą one razem podgraf K_{n+1} (gwiazda). Dodatkowo, dla każdej krawędzi $v_i v_j$ w ramach konstrukcji dodawane są krawędzie $u_i v_j$ oraz $v_i u_j$. Dla grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach powstaje graf $\mu(G)$ o $2n+1$ wierzchołkach i $3m+n$ krawędziach.

Grafy Mycielskiego - przykład





$$\omega(C_5) = \omega(\mu(C_5)) = 2$$

$\chi(C_5) = 3$ i $\chi(\mu(C_5)) = 4$ - graf Grötzscha

Oszacowania $\chi(G)$

Twierdzenie

Każdy graf G jest $(\Delta(G)+1)$-kolorowalny, tzn. $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Dowód

patrz tablica

Oszacowania $\chi(G)$

Twierdzenie

Każdy graf G jest $(\Delta(G)+1)$-kolorowalny, tzn. $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Dowód

patrz tablica

Twierdzenie

[Brooks 1941] G - graf z $\Delta(G) \geq 3$, $G \neq C_{2k+1}, K_n$

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Definicja

Mówimy, że graf G jest k-barwny krawędziowo, jeżeli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, że żadne dwie krawędzie sąsiednie nie mają tego samego koloru. Najmniejsze k, dla którego istnieje k-pokolorowanie krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G, $\chi'(G)$.

Definicja

Mówimy, że graf G jest k-barwny krawędziowo, jeżeli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, że żadne dwie krawędzie sąsiednie nie mają tego samego koloru. Najmniejsze k, dla którego istnieje k-pokolorowanie krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G, $\chi'(G)$.

$\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Definicja

Mówimy, że graf G jest k-barwny krawędziowo, jeżeli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, że żadne dwie krawędzie sąsiednie nie mają tego samego koloru. Najmniejsze k, dla którego istnieje k-pokolorowanie krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G, $\chi'(G)$.

$\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Twierdzenie Vizinga, 1964

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Twierdzenie

Obliczenie indeksu chromatycznego (w przypadku ogólnym) jest probleme NP-trudnym.

Twierdzenie

Obliczenie indeksu chromatycznego (w przypadku ogólnym) jest probleme NP-trudnym.

Definicja

Graf G nazywamy *klasy 1*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$. Analogicznie, graf G nazywamy *klasy 2*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie

Obliczenie indeksu chromatycznego (w przypadku ogólnym) jest probleme NP-trudnym.

Definicja

Graf G nazywamy *klasy 1*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$. Analogicznie, graf G nazywamy *klasy 2*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Przykłady grafów klasy 1

grafu dwudzielne, pełne K_{2k}, koła

Twierdzenie

Obliczenie indeksu chromatycznego (w przypadku ogólnym) jest probleme NP-trudnym.

Definicja

Graf G nazywamy *klasy 1*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$. Analogicznie, graf G nazywamy *klasy 2*, jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Przykłady grafów klasy 1

grafu dwudzielne, pełne K_{2k}, koła

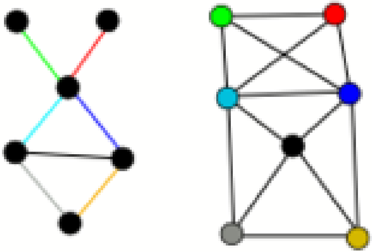
Przykłady grafów klasy 2

znacznie mniej niż grafów klasy 1;
cykle nieparzyste, grafy pełne K_{2k+1}

Kolorowanie krawędzi vs kolorowanie wierzchołków

Definicja

Graf krawędziowy (ang. *line graph*) grafu G to taki graf $L(G)$, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór krawędzi grafu G: $V(L(G)) = E(G)$, natomiast zbiorem krawędzi $E(L(G))$ jest zbiór par elementów zbioru $E(G)$.

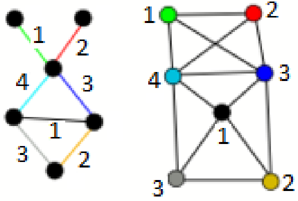


Twierdzenie

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

Twierdzenie

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$



Pytanie

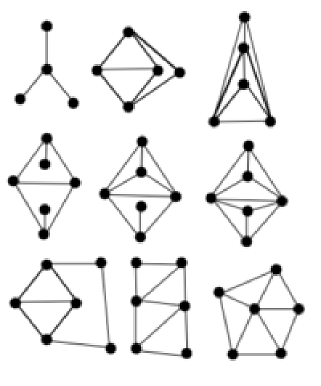
Czy dany graf jest grafem krawędziowym jakiegoś grafu, oraz czy każdy graf jest grafem krawędziowym jakiegoś grafu?

Pytanie

Czy dany graf jest grafem krawędziowym jakiegoś grafu, oraz czy każdy graf jest grafem krawędziowym jakiegoś grafu?

Twierdzenie, Beineke 1968

Graf jest grafem krawędziowym jakiegoś grafu wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego z dziewięciu wymienionych grafów:



Heurystyki - kolorowanie krawędzi

slajdy prof. Dereniowskiego - str. 22-25