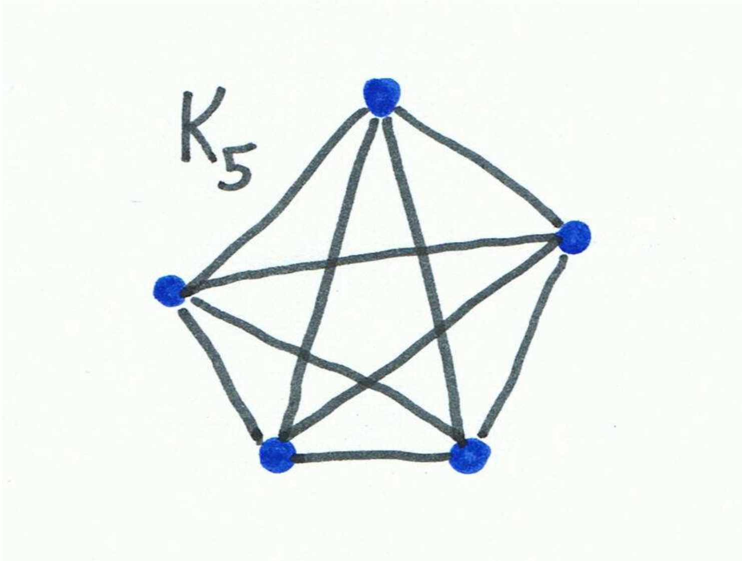
PODSTAWOWE KLASY GRAFÓW

Definicja 2.1. Graf prosty, w którym każde dwa różne wierzchołki sąsiadują ze sobą, nazywamy grafem *pełnym*.

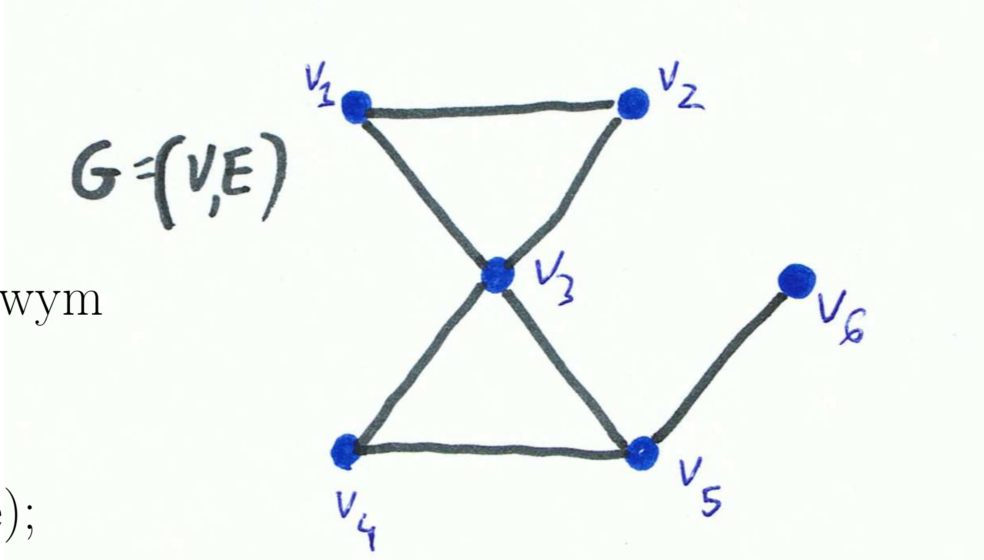


$*$ Istnieje dokładnie jeden standardowy n-wierzchołkowy graf pełny, którego wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, n$; oznaczmy go symbolem K_n.

$*$ Każdy n-wierzchołkowy graf pełny jest izomorficzny z K_n.

$*$ Graf pełny K_n, $n \geq 1$, jest spójny.

Definicja 2.2.
(Pod)Graf $H \subseteq G$ jest *kliką* w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy H jest grafem pełnym.



Przykład 2.1 W grafie na rysunku obok:

- $G[\{v_5, v_6\}]$ jest kliką *maksymalną* (ale nie największą) w grafie G, tzn. $G[\{v_5, v_6\}]$ nie jest podgrafem właściwym żadnej innej kliki w grafie G;
- np. $G[\{v_1\}]$ oraz $G[\{v_2, v_3\}]$ są klikami w grafie G (nie są maksymalne);
- $G[\{v_1, v_2, v_3\}]$ jest kliką *największą* (*najliczniejszą*) w grafie G, tzn. w grafie G nie istnieje kilka rzędu większego od rzędu $G[\{v_1, v_2, v_3\}]$.

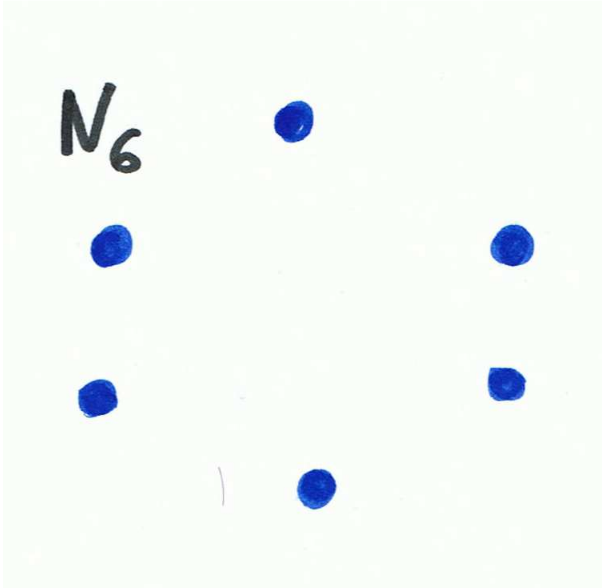
$*$ $\omega(G) = \max\{|V(H)| : \ H \text{ jest kliką w } G\}$ to liczba *klikowa* grafu G.

$*$ Dla każdego grafu $\omega(G) \geq 1$ i $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

$*$ Liczba klikowa jest parametrem trudnym obliczeniowo.

Przykład 2.2 W grafie na powyższym rysunku $\omega(G) = 3$.

Definicja 2.3. Graf prosty, w którym żadne dwa wierzchołki nie sąsiadują ze sobą, nazywamy grafem *pustym*.



$*$ Istnieje dokładnie jeden standardowy n-wierzchołkowy graf pusty, którego wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, n$; oznaczmy go symbolem N_n.

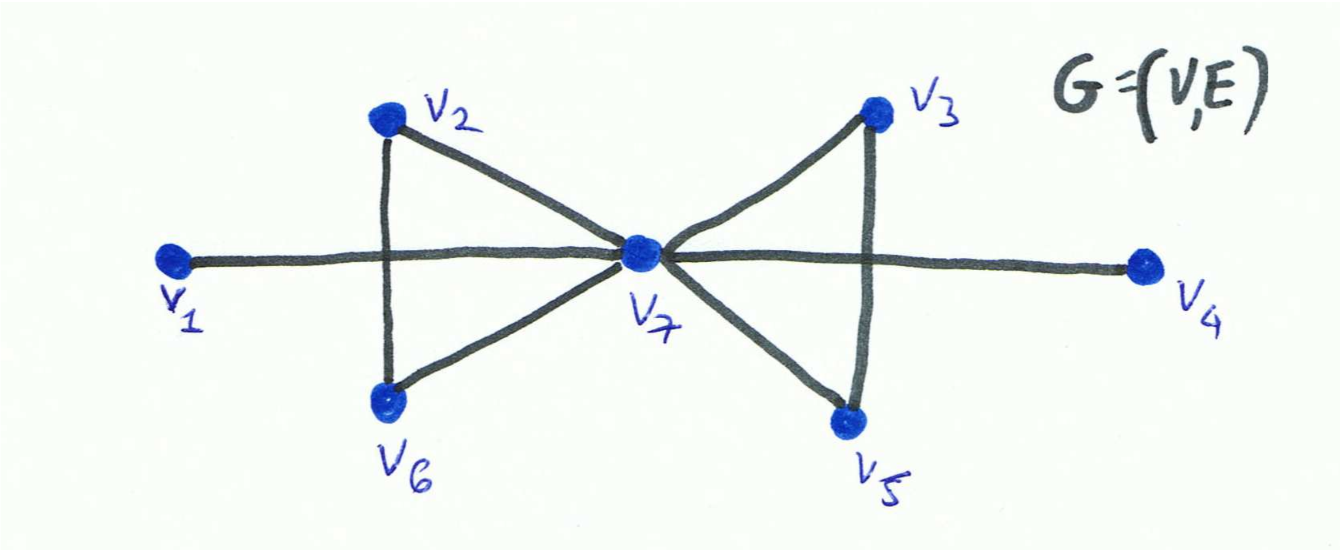
$*$ Każdy n-wierzchołkowy graf pusty jest izomorficzny z N_n;

$*$ Zbiór krawędzi dowolnego grafu pustego jest zbiorem pustym.

$*$ $K_1 \cong N_1$ oraz $N_n \subseteq K_n$ dla każdego n.

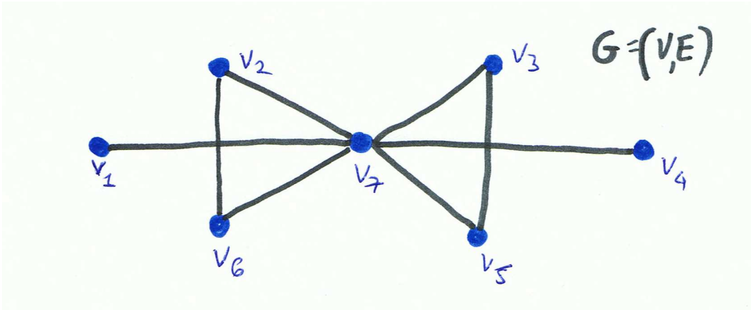
$*$ Graf pusty N_n, $n \geq 2$, jest niespójny.

Definicja 2.4. Zbiór $U \subseteq V$ jest zbiorem *niezależnym* w grafie $G = (V, E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U = \emptyset$ lub $G[U]$ jest grafem pustym.



Przykład 2.3 W grafie na rysunku powyżej:

- $\{v_2, v_5\}$ jest zbiorem niezależnym, ale nie jest maksymalnym.
- $\{v_7\}$ jest *maksymalnym* zbiorem niezależnym, tzn. nie jest podzbiorem właściwym żadnego innego zbioru niezależnego w grafie G;
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jest *największym* (*najliczniejszym*) zbiorem niezależnym w grafie G, tzn. w grafie G nie istnieje zbiór niezależny o większej ilości elementów.



$*$ $\alpha(G) = \max\{|U| : \ U \text{ jest zbiorem niezależnym w } G\}$
to liczba *niezależności* (wierzchołkowej) grafu G.

$*$ Nie każdy maksymalny zbiór niezależny jest tym realizującym $\alpha(G)$, ale każdy zbiór niezależny realizujący $\alpha(G)$ jest maksymalny.

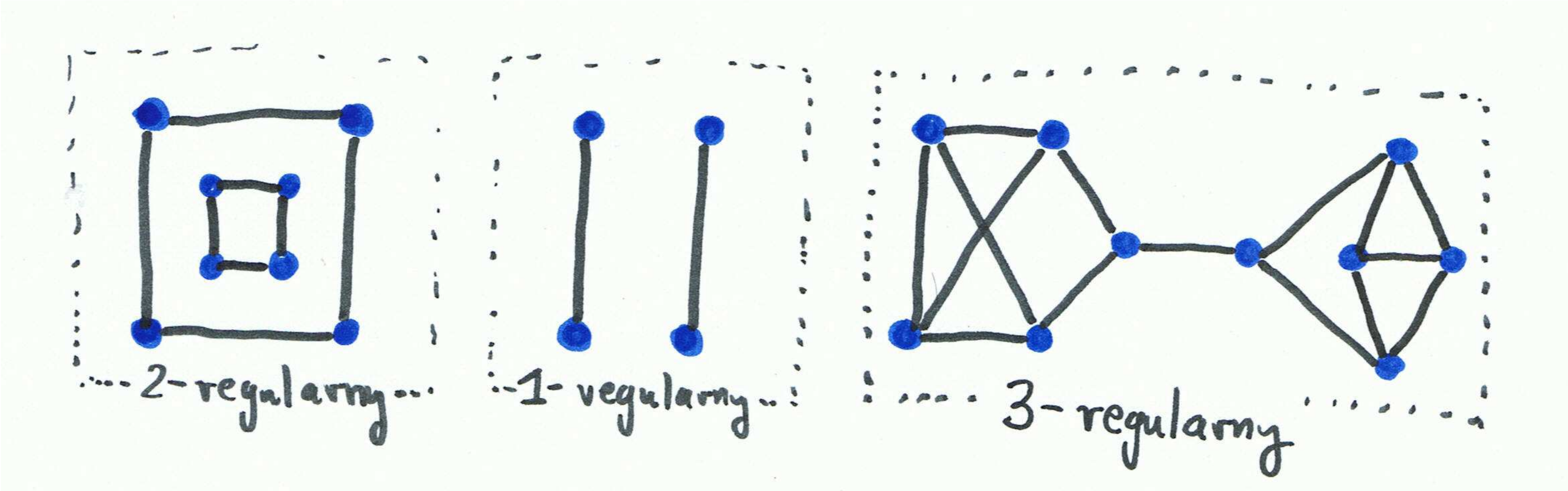
$*$ Liczba niezależności jest parametrem trudnym obliczeniowo.

Przykład 2.4 W grafie na powyższym rysunku $\alpha(G) = 4$.

Stwierdzenie 2.1. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi:*

$$1 \leq \alpha(G) \leq |V| - \delta(G) \quad \textit{oraz} \quad \alpha(G) + \omega(G) \leq |V| + 1.$$

DEFINICJA 2.5. Graf $G = (V, E)$ jest grafem *r-regularnym* (*regularnym stopnia r*) wtedy i tylko wtedy, gdy $deg(v) = r$ dla każdego wierzchołka $v \in V$.



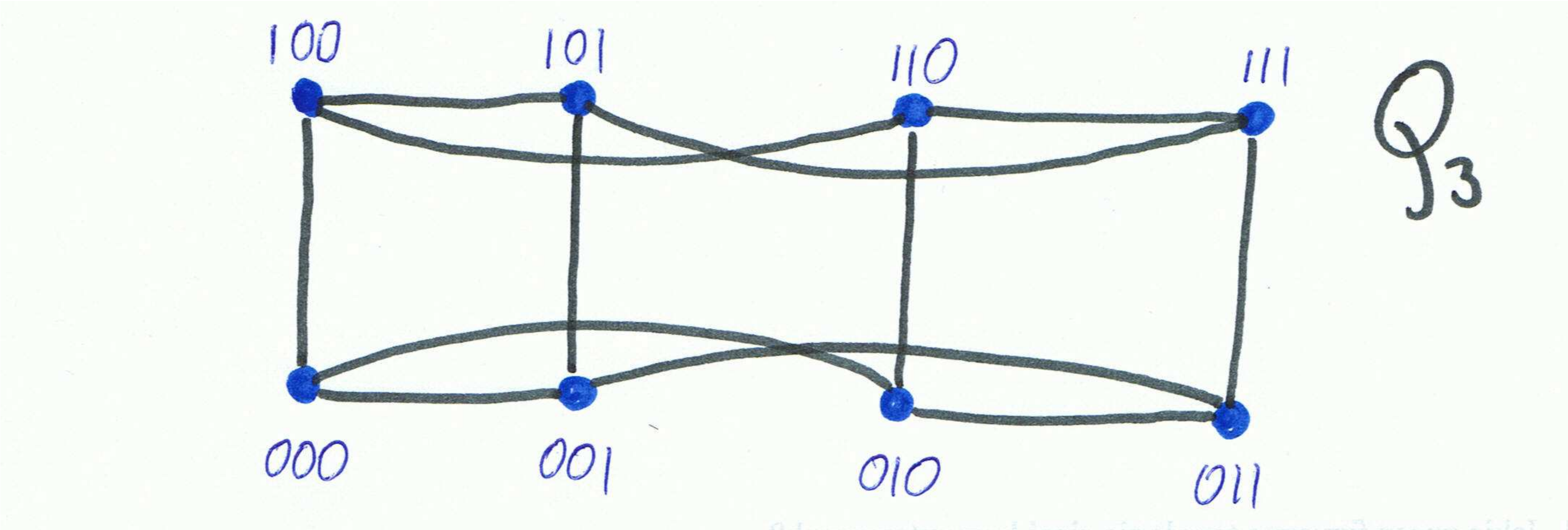
$*$ Każdy graf pusty jest grafem 0-regularnym.

$*$ Każdy n-wierzchołkowy graf pełny jest grafem $(n-1)$-regularnym.

$*$ Grafy 3-regularne to grafy *kubiczne*; ich podgrafy (o wierzchołkach stopnia $0, 1, 2$ lub 3) to grafy *podkubiczne*.

$*$ Grafy r-regularne nie muszą być spójne.

Definicja 2.6. Graf prosty, którego wierzchołkami są wszystkie k-elementowe ciągi binarne i w którym krawędzie łączą tylko te spośród ciągów, które różnią się dokładnie jednym elementem, nazywamy *k-kostką* (*hiperkostką*) i oznaczamy Q_k.

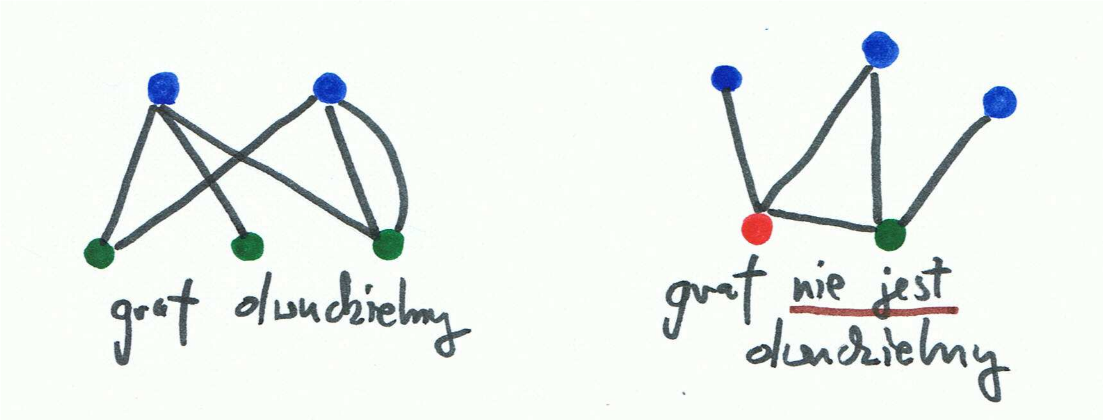


* Hiperkostka Q_k ma 2^k wierzchołków i $k2^{k-1}$ krawędzi.

* Hiperkostka Q_k jest spójnym grafem k-regularnym.

* $Q_1 \cong K_2$.

Definicja 2.7. Graf $G = (V, E)$ jest grafem *dwudzielnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją rozłączne zbiory niezależne $V_1, V_2 \subseteq V$ takie, że $V_1 \cup V_2 = V$.



∗ Rodzina $\{V_1, V_2\}$ to *podział dwudzielny* grafu G, a zbiory V_1, V_2 to *partycje dwudzielności*.

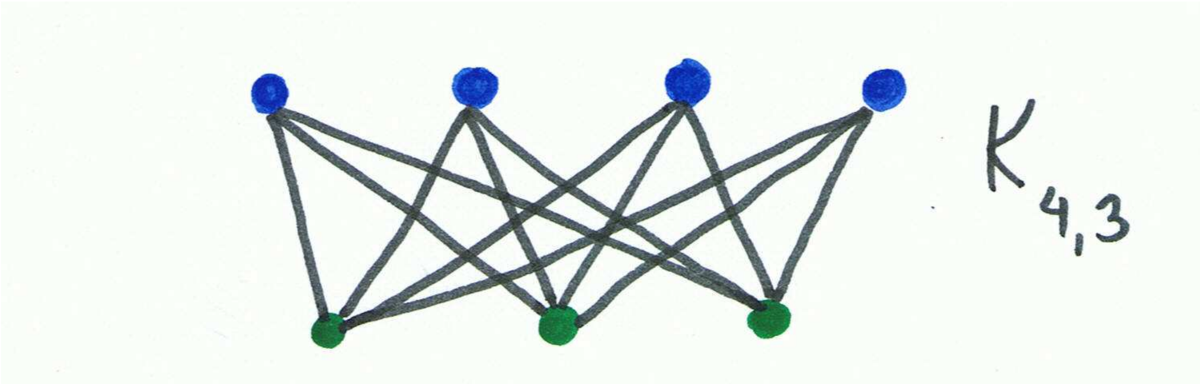
∗ Grafy dwudzielne nie mogą posiadać pętli; mogą być spójne lub nie.

∗ Podgraf grafu dwudzielnego jest grafem dwudzielnym.

∗ Spośród omówionych do tej pory grafów grafami dwudzielnymi są m.in. wszystkie hiperkostki, grafy puste i 1-regularne.

Stwierdzenie 2.2. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Wówczas G posiada dwudzielny podgraf $H = (V', E')$ taki, że $|E'| \geq \frac{1}{2}|E|$.*

Definicja 2.8. Graf prosty $G = (V, E)$ jest *pełnym grafem dwudzielnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki podział dwudzielny $\{V_1, V_2\}$, że każdy wierzchołek $u \in V_1$ sąsiaduje w G z każdym wierzchołkiem $v \in V_2$.



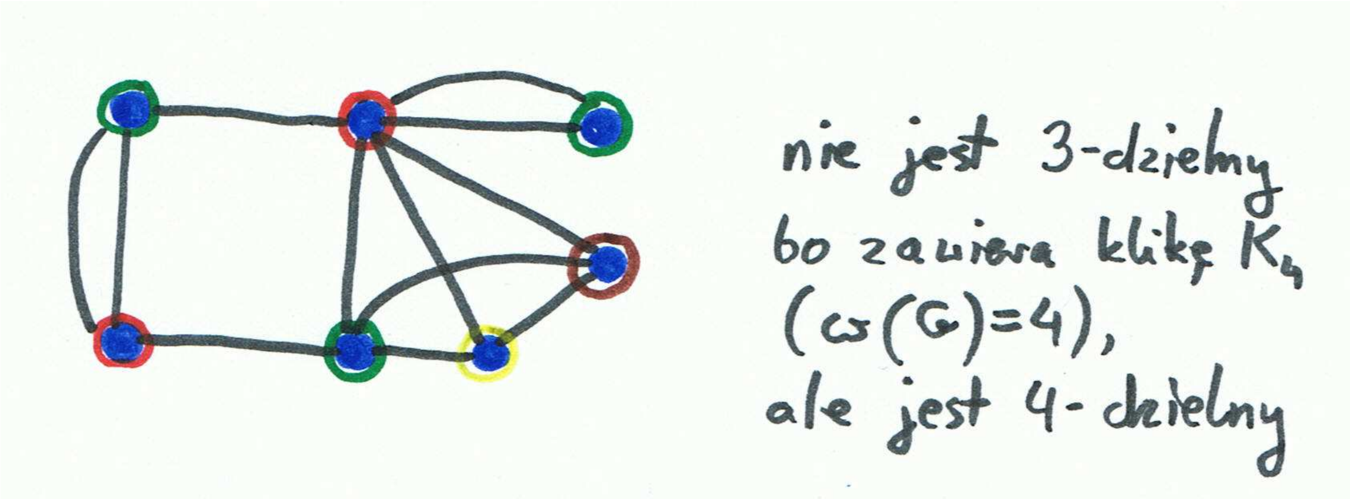
$*$ Istnieje dokładnie jeden standardowy pełny graf dwudzielny, dla którego $V_1 = \{1, 2, \ldots, r\}$ i $V_2 = \{r+1, \ldots, r+s\}$; oznaczamy go symbolem $K_{r,s}$.

$*$ Każdy pełny graf dwudzielny, dla którego $|V_1| = r$ oraz $|V_2| = s$, jest izomorficzny z $K_{r,s}$.

$*$ Graf $K_{r,s}$, $r, s \geq 1$, jest spójny.

$*$ $K_{1,1} \cong K_2$ oraz $K_{2,2} \cong Q_2$.

Definicja 2.9. Graf $G = (V, E)$ jest grafem *k-dzielnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją rozłączne zbiory niezależne $V_1, \ldots, V_k \subseteq V$ takie, że $V_1 \cup \ldots \cup V_k = V$.

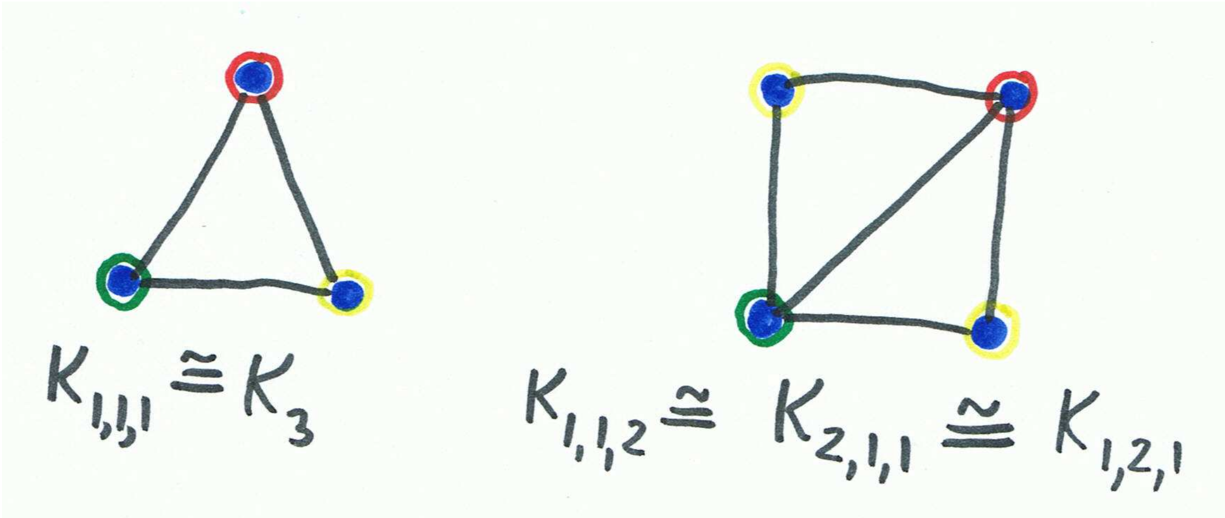


$*$ Grafy k-dzielne nie mogą posiadać pętli; mogą być spójne lub nie.

$*$ Podgraf grafu k-dzielnego jest grafem k-dzielnym

$*$ Każdy n-wierzchołkowy graf bez pętli jest grafem k-dzielnym dla pewnego $k \leq n$; każdy graf k-dzielny jest grafem l-dzielnym dla każdego $l \geq k$.

Definicja 2.10. Graf prosty $G = (V, E)$ jest *pełnym grafem k-dzielnym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste i rozłączne zbiory niezależne $V_1, \ldots, V_k \subseteq V$ takie, że $V_1 \cup \ldots \cup V_k = V$ i dla każdego $i = 1, \ldots, k$, każdy wierzchołek $u \in V_i$ sąsiaduje w G z każdym wierzchołkiem $v \in V \setminus V_i$.

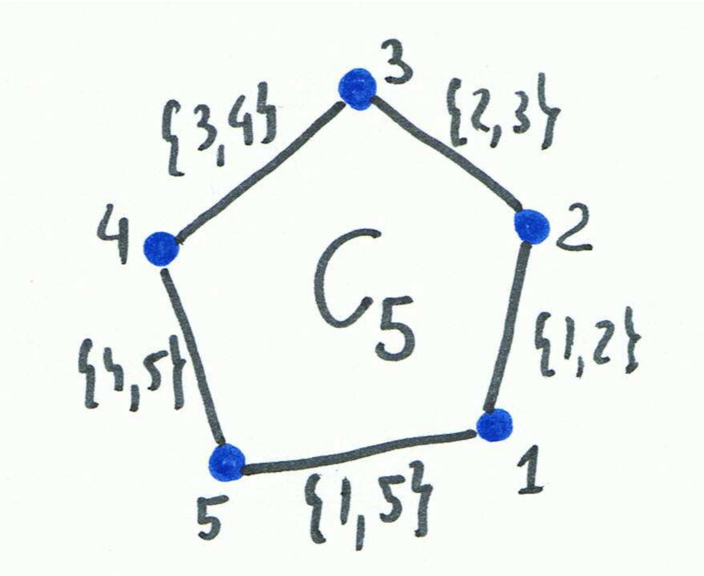


∗ Istnieje dokładnie jeden standardowy pełny graf k-dzielny, dla którego $V_i = \{s_i + 1, s_i + 2, \ldots, s_{i+1}\}$, gdzie $s_1 = 0$ i $s_{i+1} = s_i + r_i$; oznaczamy go symbolem $K_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$.

∗ Każdy pełny graf k-dzielny, dla którego $|V_i| = r_i$, $i = 1, \ldots, k$, jest izomorficzny z $K_{r_1, \ldots, r_k}$.

∗ Graf $K_{r_1, \ldots, r_k}$, $r_i \geq 1$, jest spójny.

DEFINICJA 2.11. 2-regularny spójny graf prosty $G = (V, E)$ nazywamy *cyklem*.



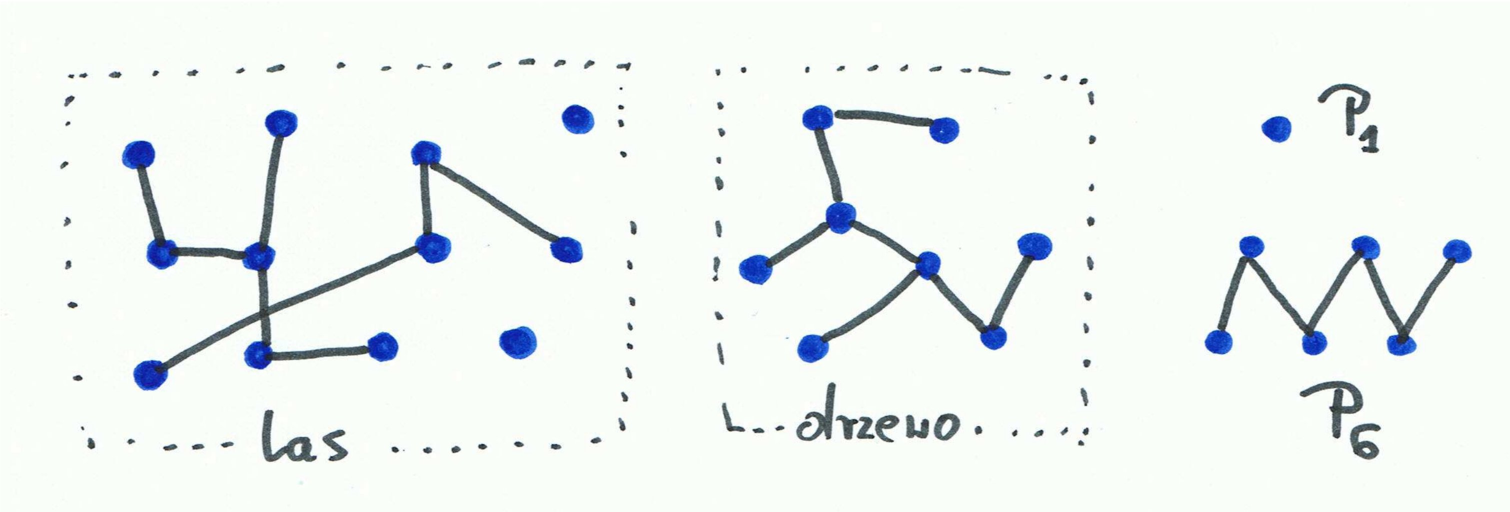
$*$ Istnieje dokładnie jeden standardowy cykl, którego wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, n$, a krawędziami zbiory $\{1, 2\}, \ldots, \{n - 1, n\}, \{n, 1\}$; oznaczamy go symbolem C_n $(n \geq 3)$.

$*$ Każdy n-wierzchołkowy cykl izomorficzny jest z C_n.

$*$ Cykl posiadający parzystą liczbę wierzchołków to cykl *parzysty*; cykl posiadający nieparzystą liczbę wierzchołków to cykl *nieparzysty*.

$*$ $C_3 \cong K_3$ i $C_4 \cong K_{2,2}$.

Definicja 2.12. Graf prosty bez podgrafów będących cyklami to *las* (inaczej: graf *acykliczny*); las będący grafem spójnym to *drzewo*. Drzewo stopnia $0, 1$ lub 2 to *ścieżka*.

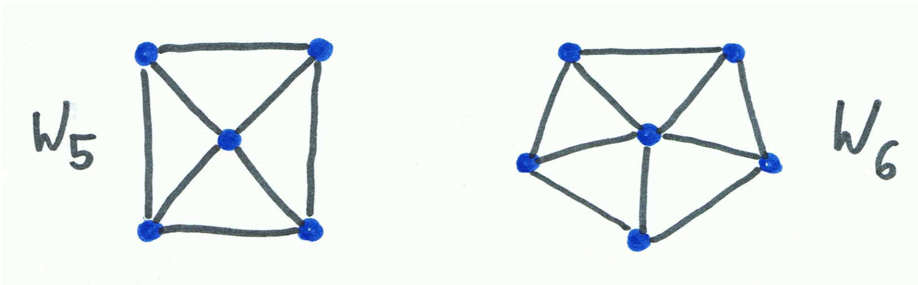


$*$ Istnieje dokładnie jedna standardowa ścieżka, której wierzchołkami są liczby $1, 2, \ldots, n$, a krawędziami zbiory $\{1, 2\}, \ldots, \{n-1, n\}$; oznaczamy go symbolem P_n.

$*$ Każda n-wierzchołkowa ścieżka jest izomorficzna z P_n.

$*$ $P_1 \cong K_1$, $P_2 \cong K_2$ i $P_3 \cong K_{2,1}$.

Definicja 2.13. Graf prosty $G = (V, E)$ jest *kołem* wtedy i tylko wtedy, gdy posiada wierzchołek v taki, że $V \setminus \{v\} = N(v)$ oraz graf $G - v$ jest cyklem

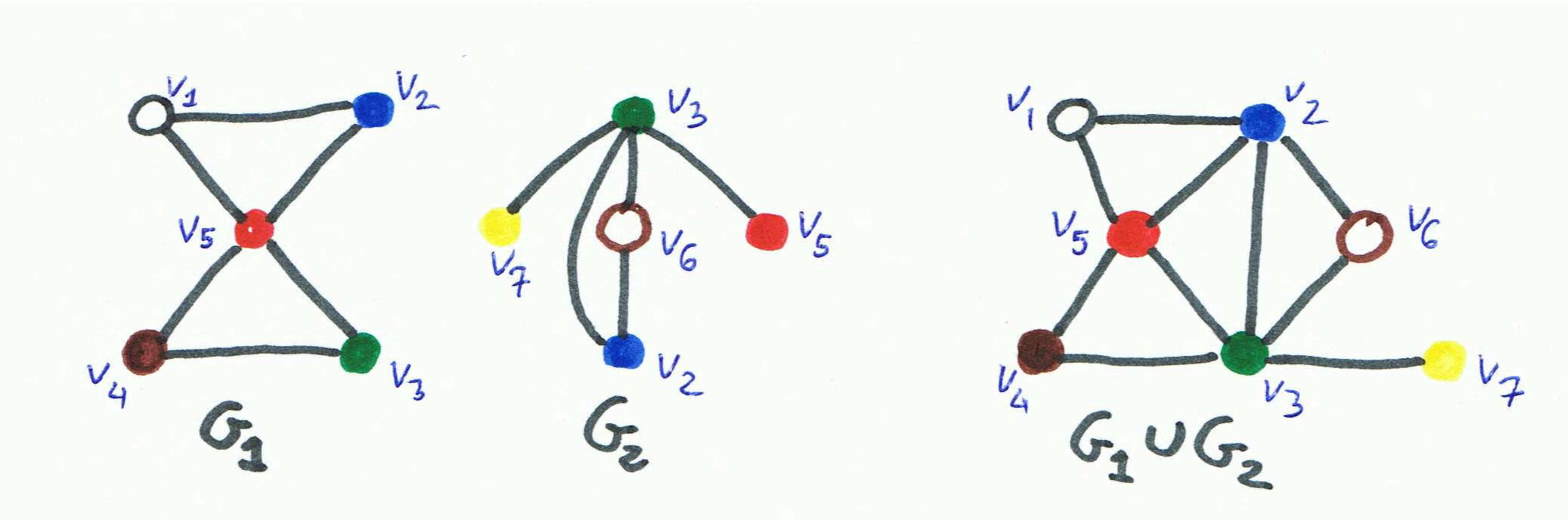


* Jeżeli $n \geq 4$, to istnieje dokładnie jedno standardowe koło, dla którego $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $v = n$ i $G - v = C_{n-1}$; oznaczamy je symbolem W_n.
* Każde n-wierzchołkowe koło jest izomorficzne z W_n.
* $W_4 \cong K_4$.

Inne klasy grafów:

* k-drzewa
* grafy doskonałe
* grafy o ograniczonej szerokości drzewiastej
* grafy szeregowo-równoległe
* ...

DEFINICJA 2.14. Niech G będzie grafem. *Sumą* grafów $G_1, G_2 \subseteq G$ nazywamy ten spośród podgrafów grafu G, którego zbiorem wierzchołków jest $V(G_1) \cup V(G_2)$ i którego zbiorem krawędzi jest $E(G_1) \cup E(G_2)$.

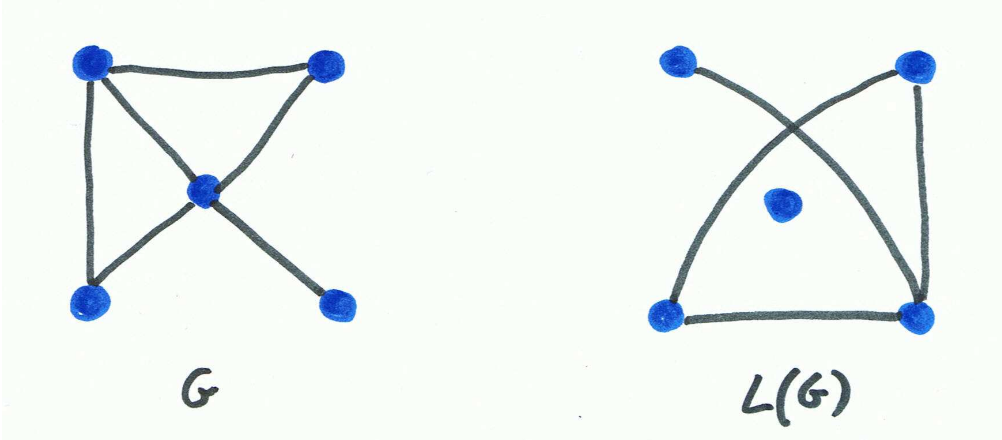


* Sumę grafów G_1 i G_2 oznaczamy symbolem $G_1 \cup G_2$; jej wartość jest niezależna od wyboru grafu G.

* Własności sumy grafów są podobne do własności sumy zbiorów; w szczególności jest ona łączna i przemienna.

* Graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie można go przedstawić w postaci sumy grafów o rozłącznych zbiorach wierzchołków.

Definicja 2.15. *Dopełnieniem* grafu prostego $G = (V, E)$ nazywamy (standardowy) graf prosty $\overline{G}$, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór V i w którym dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy nie sąsiadują w grafie G.



$*$ Graf, który jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem to graf *samodopełniający*.

$*$ Dopełnienie grafu regularnego jest grafem regularnym; dopełnienie grafu pustego jest grafem pełnym, a dopełnienie grafu pełnego grafem pustym.

$*$ Dla każdego grafu prostego zachodzi $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

$*$ Dla każdego grafu prostego zachodzi $\delta(G) + \Delta(\overline{G}) = \delta(\overline{G}) + \Delta(G) = |V| - 1$.

$*$ Graf $G = (V, E)$ jest pełnym k-dzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $\overline{G}$ składa się z k składowych spójności będących grafami pełnymi.

Definicja 2.16. Grafem *krawędziowym* niepustego grafu $G = (V, E)$ nazywamy (standardowy) graf prosty $L(G)$, którego zbiorem wierzchołków jest E, a dwa wierzchołki e_1 i e_2 sąsiadują ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie e_1, e_2 są sąsiednie w grafie G.