Algorytmiczna teoria grafów

dr Hanna Furmańczyk

24 marca 2018

Najkrótsze ścieżki - cd

Algorytm Dijkstry (dodatnie wagi!) - slajdy z ćwiczeń str. 142-144.

Algorytm Bellmana-Forda

- Wejście: obciążony spójny digraf G ze źródłem s.
- Dozwolone ujemne wagi na krawędziach.

Algorytm Bellmana-Forda

- Wejście: obciążony spójny digraf G ze źródłem s.
- Dozwolone ujemne wagi na krawędziach.
- Nie może być cykli ujemnej długości.

Algorytm Bellmana-Forda

- Wejście: obciążony spójny digraf G ze źródłem s.
- Dozwolone ujemne wagi na krawędziach.
- Nie może być cykli ujemnej długości.
- Algorytm znajduje długości najkrótszych dróg ze źródła s do wszystkich pozostałych wierzchołków grafu - macierz D.

Algorytm Bellmana-Forda

Algorytm Bellmana-Forda; $O(n^3)$

Dla każdego wierzchołka $v \in V$ podstaw $D[v] := w(s, v)$.
$D[s] := 0$
Dla każdego k od 1 do $n - 2$ wykonaj:
  dla każdego $v \neq s$ wykonaj:
    dla każdego $u \in V$ wykonaj:
      $D[v] := \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$.

Algorytm Bellmana-Forda; $O(n^3)$

Dla każdego wierzchołka $v \in V$ podstaw $D[v] := w(s, v)$.
$D[s] := 0$
Dla każdego k od 1 do $n - 2$ wykonaj:
  dla każdego $v \neq s$ wykonaj:
    dla każdego $u \in V$ wykonaj:
      $D[v] := \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$.

Dowód poprawności algorytmu - indukcyjny (po i-tej iteracji zewnętrznej pętli $D[v]$ zawiera długość z s do v zawierającą co najwyżej $i + 1$ krawędzi

Algorytm Bellmana-Forda; $O(n^3)$

Dla każdego wierzchołka $v \in V$ podstaw $D[v] := w(s, v)$.
$D[s] := 0$
Dla każdego k od 1 do $n - 2$ wykonaj:
  dla każdego $v \neq s$ wykonaj:
    dla każdego $u \in V$ wykonaj:
      $D[v] := \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$.

Dowód poprawności algorytmu - indukcyjny (po i-tej iteracji zewnętrznej pętli $D[v]$ zawiera długość z s do v zawierającą co najwyżej $i + 1$ krawędzi
Przykład - slajd 45 (Dereniowski)

Obserwacje

- istnieje wierzchołek, do którego nie wchodzi żadna krawędź

Grafy acykliczne

Obserwacje

- istnieje wierzchołek, do którego nie wchodzi żadna krawędź
- wierzchołki można ponumerować tak, aby krawędź prowadziła od nuemru mniejszego do większego (przykład)

Grafy acykliczne

Obserwacje

- istnieje wierzchołek, do którego nie wchodzi żadna krawędź
- wierzchołki można ponumerować tak, aby krawędź prowadziła od nuemru mniejszego do większego (przykład)

Algorytm. $O(n^2)$

Dane wejściowe: acykliczny, obciążony digraf $G = (V, A, w)$ ze źródłem s, (wierzchołki odpowiednio ponumerowane).
Dane wyjściowe: macierz D odległości z s do wszystkich wierzchołków w G.

Dla każdego $v \in V$ podstaw $D[v] := \infty$.
$D[s] := 0$.
Dla każdego $v \in V$ po kolei wg numerów wykonaj:
dla każdego $u < v$
$D[v] := \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$.

Definicja

Zbiór krawędzi M jest *skojarzeniem* (ang. *matching*)w grafie G, jeżli żadne dwie krawędzie należące do M nie mają wspólnego wierzchołka.

Skojarzenia

Definicja

Zbiór krawędzi M jest *skojarzeniem* (ang. *matching*)w grafie G, jeżli żadne dwie krawędzie należące do M nie mają wspólnego wierzchołka.

Przykład

Problemy:

- najliczniejsze skojarzenie – szukamy skojarzenia zawierającego największą możliwą liczbę krawędzi

Problemy:

- najliczniejsze skojarzenie – szukamy skojarzenia zawierającego największą możliwą liczbę krawędzi
- dokładne skojarzenie (ang. *perfect matching* – pytamy, czy istnieje skojarzenie złożone z $n/2$ krawędzi (n musi być parzyste)

Problemy:

- najliczniejsze skojarzenie – szukamy skojarzenia zawierającego największą możliwą liczbę krawędzi
- dokładne skojarzenie (ang. *perfect matching* – pytamy, czy istnieje skojarzenie złożone z $n/2$ krawędzi (n musi być parzyste)
- skojarzenie o minimalnej (maksymalnej) wadze – szukamy w obciążonym grafie takiego skojarzenia, aby suma wag jego krawędzi była możliwie najmniejsza (największa)

Problemy:

- najliczniejsze skojarzenie – szukamy skojarzenia zawierającego największą możliwą liczbę krawędzi
- dokładne skojarzenie (ang. *perfect matching* – pytamy, czy istnieje skojarzenie złożone z $n/2$ krawędzi (n musi być parzyste)
- skojarzenie o minimalnej (maksymalnej) wadze – szukamy w obciążonym grafie takiego skojarzenia, aby suma wag jego krawędzi była możliwie najmniejsza (największa)
- dokładne skojarzenie o minimalnej (maksymalnej) wadze – j.w. oraz dodatkowo skojarzenie musi zawierać $n/2$ krawędzi

Definicja

Niech M będzie dowolnym skojarzeniem.

- Krawędź nz *skojarzoną*, jeżeli należy ona do M. W przeciwnym wypadku krawędź jest *nieskojarzona*.

Definicja

Niech M będzie dowolnym skojarzeniem.

- Krawędź nz *skojarzoną*, jeżeli należy ona do M. W przeciwnym wypadku krawędź jest *nieskojarzona*.
- Wierzchołek v nz *wolnym* (w odniesieniu do konkretnego skojarzenia), jeżeli żadna spośród krawędzi należących do M nie zawiera v.

Definicja

Niech M będzie dowolnym skojarzeniem.

- Krawędź nz *skojarzoną*, jeżeli należy ona do M. W przeciwnym wypadku krawędź jest *nieskojarzona*.
- Wierzchołek v nz *wolnym* (w odniesieniu do konkretnego skojarzenia), jeżeli żadna spośród krawędzi należących do M nie zawiera v.
- Droga P jest *naprzemienna* wzgl. M, jeżeli dla dowolnych dwóch sąsiednich krawędzi należących do P nie jest prawdą, że jednocześnie należą lub nie należą one do M.

Definicja

Niech M będzie dowolnym skojarzeniem.

- Krawędź nz *skojarzoną*, jeżeli należy ona do M. W przeciwnym wypadku krawędź jest *nieskojarzona*.
- Wierzchołek v nz *wolnym* (w odniesieniu do konkretnego skojarzenia), jeżeli żadna spośród krawędzi należących do M nie zawiera v.
- Droga P jest *naprzemienna* wzgl. M, jeżeli dla dowolnych dwóch sąsiednich krawędzi należących do P nie jest prawdą, że jednocześnie należą lub nie należą one do M.
- Droga naprzemienna, która zaczyna się i kończy w różnych wierzchołkach wolnych jest *drogą powiększającą*.

Definicja

Niech $A, B \subseteq E(G)$ będą zbiorami. Wówczas
$A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Definicja

Niech $A, B \subseteq E(G)$ będą zbiorami. Wówczas $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Twierdzenie

Jeśli M jest skojarzeniem, natomiast P drogą powiększającą wzgl. M, to $M' := M \oplus P$ jest również skojarzeniem. Ponadto $|M'| = |M| + 1$ - PRZYKŁAD.