Algorytmiczna teoria grafów

Podstawowe pojęcia i klasy grafów

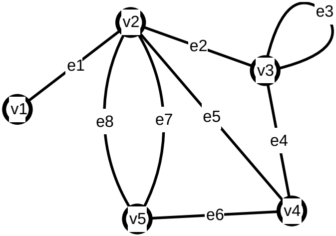
dr Hanna Furmańczyk

Definicja

Graf nieskierowany (graf) $G = (V, E)$ jest to uporządkowana para składająca się z niepustego skończonego zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi E, gdzie krawędzie to nieuporządkowane pary wierzchołków:

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V\}.$$

Przykład 1: $G = (V, E)$:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_5\}\}.$



Definicja

Rząd grafu $G = (V, E)$, ozn. przez n, jest to $|V|$.
Rozmiar grafu $G = (V, E)$, ozn. przez m, jest to $|E|$.

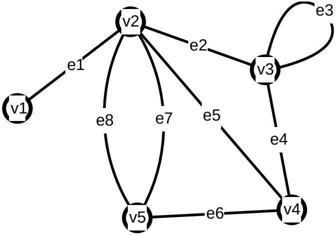
Graf z Przykładu 1 jest rzędu 5 oraz ma rozmiar 8.

Definicja

Relacja $I = \{(v, e) \in V \times E : v \in e\}$ to relacja *incydencji*.

Zatem, jeśli $v \in e$, wówczas:

- wierzchołek v jest *incydentny* z krawędzią e w grafie G;
- krawędź e jest *incydentna* z wierzchołkiem v w grafie G.

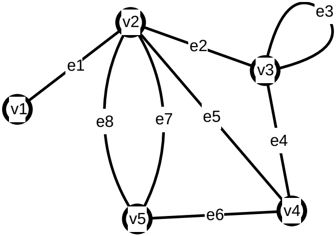


W grafie z Przykładu 1:

- wierzchołek v_1 jest incydentny z e_1, v_3 jest incydentny z e_3, e_4, itd.;
- krawędź e_2 jest incydentna z v_2 i v_3, e_3 jest incydentna z v_4, itd.

Rozróżniamy trzy typy krawędzi:

- *pętle*, czyli krawędzie incydentne z dokładnie jednym wierzchołkiem;
- krawędzie *jednokrotne*;
- krawędzie *wielokrotne* (*równoległe*, *multikrawędzie*).



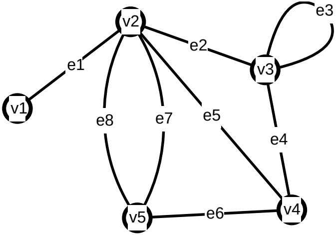
W grafie z Przykładu 1:

- krawędź e_3 jest pętlą;
- krawędź e_1 jest krawędzią jednokrotną, itd.;
- krawędź e_7 jest krawędzią wielokrotną.

Definicja

Grafy nieskierowane dzielimy na grafy *proste* (bez pętli i multikrawędzi), *multigrafy* (bez pętli) oraz *pseudografy* (pozostałe grafy).

Krawędzie $e, \hat{e} \in E$ *sąsiadują* ze sobą w grafie $= G(V, E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e \cap \hat{e} \neq \emptyset$.
Wierzchołki $u, v \in V$ *sąsiadują* ze sobą w $G = (V, E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = v$ i $\{v\} \in E$ lub $u \neq v$ i $\{u, v\} \in E$.

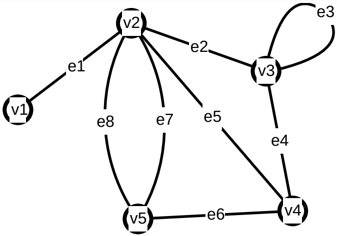


W grafie z Przykładu 1:

- krawędź e_1 jest sąsiednia z e_2, krawędź e_3 jest sąsiednia z e_4, itd.;
- krawędź jest sąsiednia sama z sobą;
- wierzchołek v_1 jest sąsiedni z v_2, a v_3 jest sąsiedni z samym sobą, itd.

Definicja

Zbiór $N(v) = \{u \in V : u \text{ sąsiaduje z } v\}$ to *sąsiedztwo* wierzchołka v w grafie $G = (E, V)$.
Zbiór $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ to *domknięte sąsiedztwo* wierzchołka v.

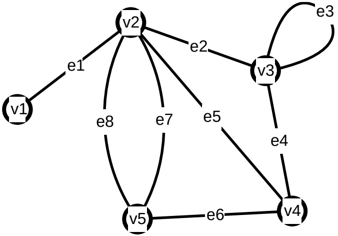


W grafie z Przykładu 1:

- $N(v_1) = \{v_2\}$, $N[v_1] = \{v_1, v_2\}$;
- $N(v_3) = N[v_3] = \{v_2, v_3, v_4\}$.

Definicja

Stopień wierzchołka v w grafie $G = (E, V)$, ozn. $\deg_G(v)$, to liczba incydentnych z nim krawędzi [pętla liczona jest podwójnie]. Wierzchołki stopnia 0 noszą nazwę wierzchołków *izolowanych*, a wierzchołki stopnia 1 to *liście* (wierzchołki *wiszące*).

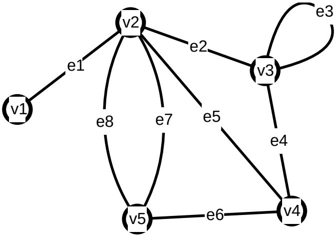


W grafie z Przykładu 1:

- $\deg_G(v_1) = 1$, czyli v_1 jest liściem;
- $\deg_G(v_3) = 4$.

Definicja

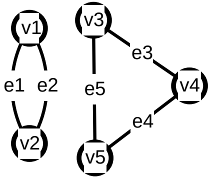
Liczba $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ dla danego grafu $G = (E, V)$ nosi nazwę *maksymalnego stopnia* (bądź *stopnia*); natomiast *stopień minimalny* grafu G to $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$.



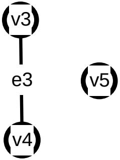
W grafie z Przykładu 1:
$\Delta(G) = 5$, $\delta(G) = 1$

Przykład 2

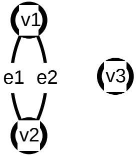
G1



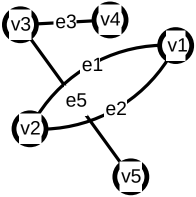
G3



G2



G4

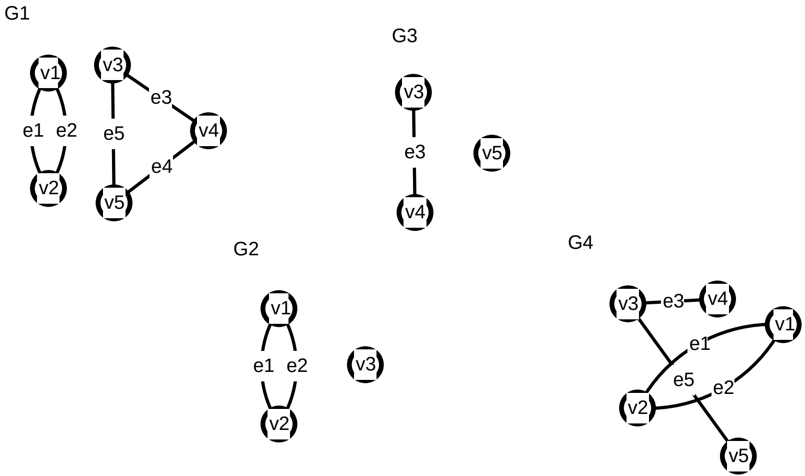


Definicja

Graf $G = (V(G), E(G))$ jest *podgrafem* grafu $H = (V(H), E(H))$ (H jest *nadgrafem* grafu G) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$V(G) \subseteq V(H), \;\; E(G) \subseteq E(H).$$

Jeżeli G jest podgrafem H, to piszemy $G \subseteq H$. Podgraf G jest podgrafem *właściwym* (nadgraf H grafu G jest nadgrafem *właściwym*), jeśli $G \neq H$.



Np. G_4 jest podgrafem właściwym G_1 ($G_4 \subsetneq G_1$).

Np. G_1 jest nadgrafem właściwym G_2, G_3 i G_4.

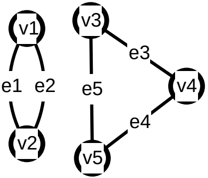
Definicja

Dla niepustego zbioru $U \subset V$, podgraf grafu $G = (V, E)$ powstały przez usunięcie z niego wierzchołków należących do $V \setminus U$ i wszystkich incydentnych z nimi krawędzi to *podgraf indukowany przez zbiór U*.

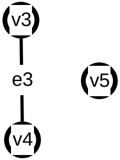
- ozn. $G|_U$ lub $G[U]$;
- jeżeli G jest rzędu przynajmniej 2 i $v \in V$, to $G - v = G[V \setminus \{v\}]$;
- jeżeli $U \subsetneq V$, to $G - U = G[V \setminus U]$;

- Podgraf grafu G powstały poprzez usunięcie z niego krawędzi oznaczamy przez $G - e$.
- Podgraf grafu G powstały poprzez usunięcie z niego krawędzi należących do zbioru $F \subseteq E$ oznaczamy przez $G - F$.

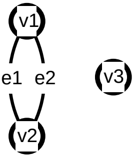
G1



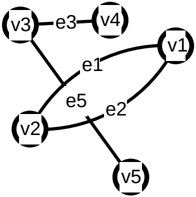
G3



G2



G4



$$G_2 = G_1 - \{v_4, v_5\} = G_1[\{v_1, v_2, v_3\}];$$
$$G_4 = G_1 - e_4.$$

Definicja

Grafy G i H są *identyczne* ($G = H$), jeśli $V(G) = V(H)$ oraz $E(G) = E(H)$.

Definicja

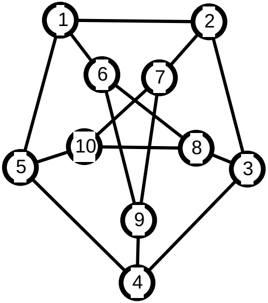
Dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są izomorficzne, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość $h : V_1 \to V_2$ pomiędzy wierzchołkami G_1 i wierzchołkami G_2 taka, że

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E_2.$$

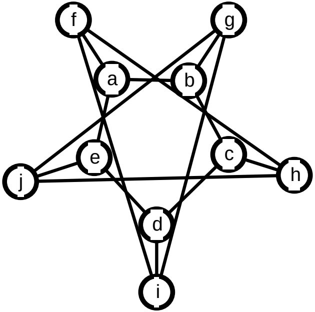
Zapisujemy $G_1 \cong G_2$

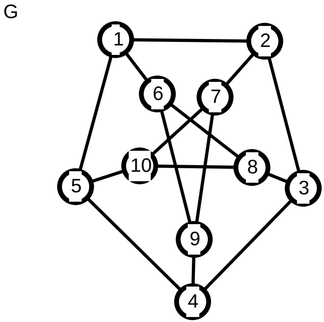
Ogólnie: grafy izomoroficzne można traktować jak identyczne (mają taką samą reprezentację graficzną z dokładnością do etykiet).

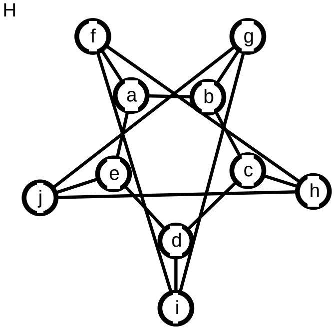
G



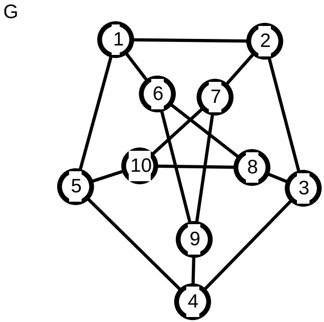
H

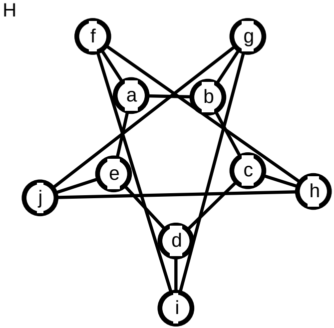






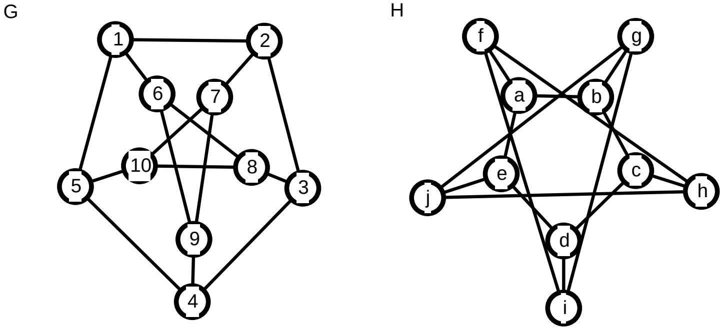
Czy $G \cong H$?





Czy $G \cong H$?

Odp.: TAK



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Twierdzenie

Jeżeli dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są izomorficzne, to:

- G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków: $|V_1| = |V_2|$.
- G_1 i G_2 mają tyle samo krawędzi: $|E_1| = |E_2|$.
- dla dowolnego k multigrafy G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków stopnia k.

Twierdzenie

Jeżeli dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są izomorficzne, to:

- G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków: $|V_1| = |V_2|$.
- G_1 i G_2 mają tyle samo krawędzi: $|E_1| = |E_2|$.
- dla dowolnego k multigrafy G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków stopnia k.

Czy to wystarczy, aby dwa grafy były izomorficzne?

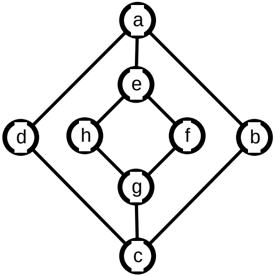
Twierdzenie

Jeżeli dwa multigrafy $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ są izomorficzne, to:

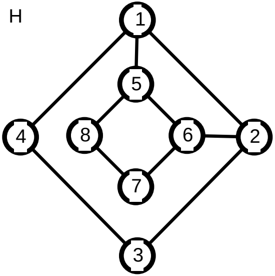
- G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków: $|V_1| = |V_2|$.
- G_1 i G_2 mają tyle samo krawędzi: $|E_1| = |E_2|$.
- dla dowolnego k multigrafy G_1 i G_2 mają tyle samo wierzchołków stopnia k.

Czy to wystarczy, aby dwa grafy były izomorficzne?
Odp.: NIE

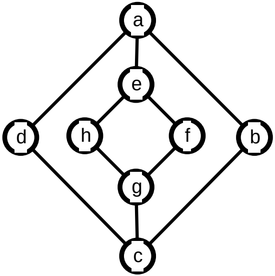
G



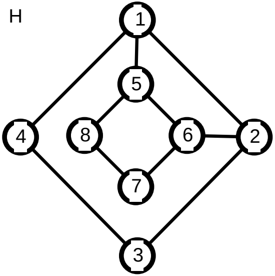
H



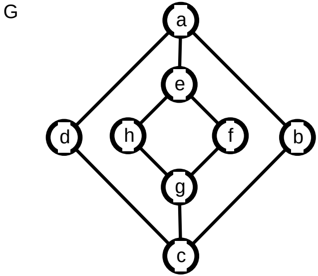
G

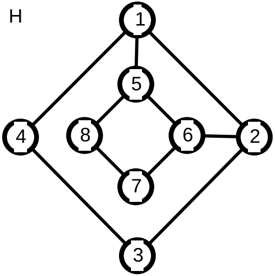


H



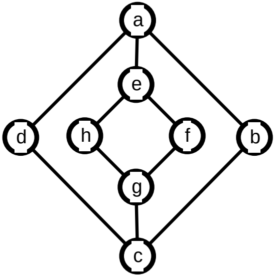
$$|V(G)| = |V(H)|$$



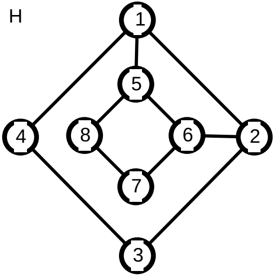


$$|V(G)| = |V(H)|$$
$$|E(G)| = |E(H)|$$

G



H

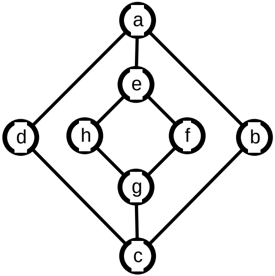


$$|V(G)| = |V(H)|$$
$$|E(G)| = |E(H)|$$

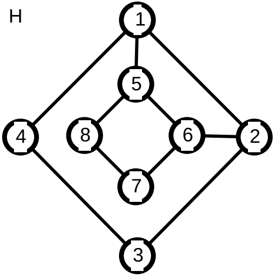
ciąg stopni dla grafu G: $(3,3,3,3,2,2,2,2)$

ciag stopni dla grafu H: $(3,3,3,3,2,2,2,2)$

G



H



$$|V(G)| = |V(H)|$$
$$|E(G)| = |E(H)|$$

ciąg stopni dla grafu G: $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$

ciag stopni dla grafu H: $(3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)$

jednak $G \not\cong H$

Problem izomorfizmu grafów jest bardzo ważny, np. ze względu na zastosowania. Jednakże dotychczas nie jest znany wielomianowy algorytm rozstrzygający, czy dane dwa grafy są izomorficzne.

Twierdzenie (Lemat o uściskach dłoni)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Wówczas

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Twierdzenie (Lemat o uściskach dłoni)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Wówczas

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Dowód

Sumując stopnie wierzchołków grafu liczymy, ile jest w sumie krawędzi incydentnych z jego wierzchołkami. Każda krawędź zostanie policzona dwukrotnie, zatem suma stopni równa się podwojonej liczbie krawędzi. □

Definicja

Liczba $d(G) = \frac{\sum_{v \in V} \deg_G(v)}{|V|}$ jest to *średni stopień* grafu $G = (V, E)$.

Definicja

Ciąg c liczb naturalnych jest ciągiem *graficznym*, jeśli istnieje graf prosty, którego stopnie wierzchołków odpowiadają elementom ciągu c.

Definicja

Ciąg c liczb naturalnych jest ciągiem *graficznym*, jeśli istnieje graf prosty, którego stopnie wierzchołków odpowiadają elementom ciągu c.

Twierdzenie (Havel 1955, Hakimi 1962)

Rozważmy następujące dwa nierosnące ciągi liczb naturalnych:

(1) $s, t_1, \ldots, t_s, d_1, \ldots, d_k,$

(2) $t_1 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, \ldots, d_k.$

Wówczas ciąg (1) jest ciągiem graficznym wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (2) jest ciągiem graficznym.

Na przykład ciąg $(3, 2, 2, 2, 1)$ jest graficzny, podczas gdy ciągi $(3, 3, 3, 1, 1)$ oraz $(4, 4, 4, 4, 2)$ już nie są graficzne.