# Nieklasyczne modele kolorowania grafów

# Kolorowanie sprawiedliwe

**Def.** Jeśli wierzchołki grafu $G$ można podzielić na $k$ takich zbiorów niezależnych $C_1,...,C_k$, że $||C_i| - |C_j|| \leq 1$ dla wszystkich $i,j = 1,...,k$, to mówimy, że $G$ jest *sprawiedliwie k-kolorowalny*. Najmniejsza liczba $k$, dla której graf $G$ jest sprawiedliwie $k$-kolorowalny jest *sprawiedliwą liczbą chromatyczną* grafu i oznaczamy ją symbolem $\chi_=(G)$.

**Uwaga:** Prawdziwe jest oszacowanie $\chi(G) \leq \chi_=(G)$, gdyż każde sprawiedliwe pokolorowanie jest jednocześnie pokolorowaniem klasycznym.

**Przykład:** Różnica $\chi_=(G) - \chi(G)$ może być dowolnie duża – przykładem są grafy $S_n$.

# Kolorowanie sprawiedliwe

**Tw.** *Dla dowolnego grafu G zachodzi* $\chi_=(G) \le \Delta(G) + 1$.

**Tw.** *Prawdziwe jest oszacowanie dolne*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G-(N(v)\cup\{v\}))+2} \right\rceil \le \chi_=(G),$$

*gdzie* $\alpha(G)$ *jest liczbą stabilności grafu* (*moc najliczniejszego zbioru niezależnego w G*) *natomiast v jest dowolnym wierzchołkiem grafu G*.

**Dowód:**

- liczba wierzchołków zaetykietowana kolorem przydzielonym $v$ nie przekracza $\alpha(G - (N(v)\cup\{v\}))+1$,
- skoro chcemy otrzymać pokolorowanie sprawiedliwe, to krotność każdego innego koloru nie przekracza $\alpha(G - (N(v)\cup\{v\}))+2$.

# Kolorowanie sprawiedliwe

**Tw.** *Wzory na sprawiedliwą liczbę chromatyczną w przypadku podstawowych klas grafów:*

$$\chi_{=}(Q_n) = 2$$

$$\chi_{=}(K_{1,n}) = \lceil n/2 \rceil + 1$$

$$\chi_{=}(W_n) = \lceil (n-1)/2 \rceil + 1$$

$$\chi_{=}(C_{2k+1}) = 3$$

$$\chi_{=}(C_{2k}) = 2$$

**Tw.** $\chi_{=}(K_{r_1,\dots,r_s}) \le \Delta(K_{r_1,\dots,r_s})$.

**Wniosek** $\chi_{=}(K_{r_1,\dots,r_s}) = s$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $|r_i - r_j| \le 1$ *dla wszystkich i,j.*

# Kolorowanie sprawiedliwe

**Tw.** *Niech G będzie grafem dwudzielnym o n wierzchołkach. Jeśli G składa się z r składowych i r ≥ n/k dla pewnej liczby naturalnej k, to G jest sprawiedliwie k-kolorowalny.*

**Dowód:**

- załóżmy, że $G$ jest sumą grafów dwudzielnych $(V_1 \cup U_1, E_1), \ldots, (V_r \cup U_r, E_r)$,
- porządkujemy wierzchołki ustawiając je w ciąg $V_1, \ldots, V_r, U_1, \ldots, U_r$, przy czym w obrębie każdego ze zbiorów wierzchołki są posortowane dowolnie,
- dzielimy ten ciąg na segmenty o rozmiarach $\lceil n/k \rceil, \lceil (n-1)/k \rceil, \ldots, \lceil (n - \mathrm{k} + 1)/k \rceil$,
- każdy z tych segmentów jest zbiorem niezależnym, gdyż w przeciwnym razie istnieje segment $S$ taki, że $S$ obejmuje $r$ podzbiorów $(V_i, U_i)$ wraz z dodatkowym wierzchołkiem, co oznacza $\lceil n/k \rceil \geq r + 1 \geq 1 + n/k > \lceil n/k \rceil$ – sprz,

**Tw.** *Jeśli G jest sumą sprawiedliwie k-kolorowalnych grafów, to G jest sprawiedliwie k-kolorowalny.*

# Kolorowanie sumacyjne

**Def.** Niech $c$ będzie wierzchołkowym pokolorowaniem grafu $G$. Sumą chromatyczną (wierzchołkową) grafu $G$ nazywamy liczbę

$$\sum(G) = \min_c \sum(G, c),$$

gdzie

$$\sum(G, c) = \sum_{v \in V(G)} c(v).$$

*Pokolorowaniem optymalnym* jest każde takie pokolorowanie $c$, że

$$\sum(G) = \sum(G, c).$$

Przez $c_{\max}$ oznaczamy najwyższy kolor użyty przez pokolorowanie $c$, natomiast $s(G)$ jest minimalną liczbą kolorów użytych przez pokolorowanie optymalne. Jak poprzednio, $C_i$ oznacza zbiór niezależny zawierający wierzchołki o kolorze $i$ (w pokolorowaniu $c$).

# Kolorowanie sumacyjne

**Tw.** *Dla dowolnego optymalnego pokolorowania c zachodzi*

$$|C_1| \geq |C_2| \geq \ldots \geq |C_{c_{\max}}|.$$

**Dowód:** Przypuśćmy, że $|C_i| < |C_j|$ dla $i < j$. Jeśli wierzchołki należące do zbioru $C_i$ otrzymają kolor $j$ oraz wierzchołki należące do $C_j$ otrzymają kolor $i$, to otrzymane pokolorowanie jest poprawne oraz jego suma jest mniejsza o $(j - i)(|C_j| - |C_i|) > 0$ od sumy pokolorowania wyjściowego. Sprzeczność.

**Tw.** *Dla dowolnego optymalnego pokolorowania c zachodzi*

$$\forall_{i<j} \forall_{v \in C_j} \exists_{u \in C_i} \{u, v\} \in E(G).$$

**Dowód:** Gdyby pewien wierzchołek $v$ ze zbioru $C_j$ nie był połączony z żadnym wierzchołkiem z pewnego zbioru $C_i$ dla $i < j$, to $v$ może otrzymać kolor $i$. Sprzeczność.

# Kolorowanie sumacyjne

**Tw.** *Dla grafu G zachodzą oszacowania*:

$$(1)\quad n \le \sum(G) \le \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2)\quad \sum(G) \le n+m$$

**Dowód:**

(1) wynika z faktu, że kolory mają wartości nie mniejsze niż 1 oraz suma jest największa jeśli wszystkie kolory są parami różne.

(2) Z poprzedniego twierdzenia wynika, że liczba krawędzi łączących wierzchołki z $C_j$, $j > 2$ z wierzchołkami z $C_1 \cup \ldots \cup C_{j-1}$ wynosi co najmniej $|C_j|(j-1)$. Zatem

$$\sum(G,c) = |C_1| + \sum_{j>1} |C_j|(j-1) + n - |C_1| \le n+m$$

# Kolorowanie sumacyjne

**Tw.** *Prawdziwe są następujące wzory na sumę chromatyczną*:

(1) $$\sum(P_n) = \lfloor 3n/2 \rfloor$$

(2) $$\sum(C_n) = 3\lceil n/2 \rceil$$

(3) $$\sum(W_n) = \begin{cases} 3(n+1)/2, \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ 3n/2+4, \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}$$

(4) $$\sum(K_{r,s}) = r + s + \min\{r, s\}$$

(5) $$\sum(K_n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(6) $$\sum(C_{r,s}) = \lfloor 3s/2 \rfloor + r + 2,$$

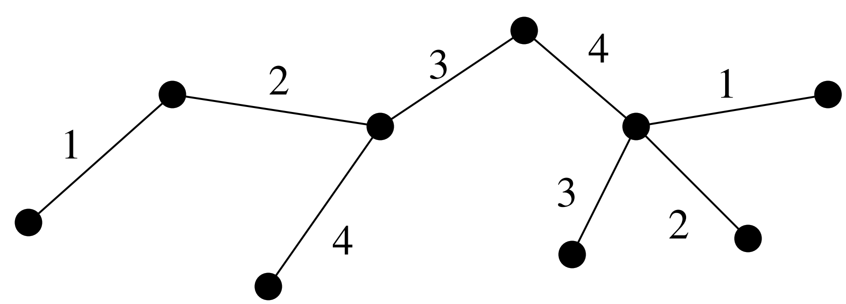
gdzie $C_{r,s}$ jest kometą z $r$ promieniami i warkoczem długości $s$.

# Kolorowanie zwarte

**Def.** Podzbiór $A$ liczb naturalnych nazywamy *przedziałem* jeśli zawiera wszystkie liczby pomiędzy min$A$ oraz max$A$.

**Def.** Niech $G$ będzie dowolnym grafem. Funkcja odwzorowująca zbiór krawędzi grafu w zbiór liczb naturalnych jest pokolorowaniem *zwartym* jeśli sąsiednie krawędzie otrzymują różne kolory oraz dla każdego wierzchołka $v$, zbiór kolorów przydzielonych krawędziom incydentnym do $v$ jest przedziałem.

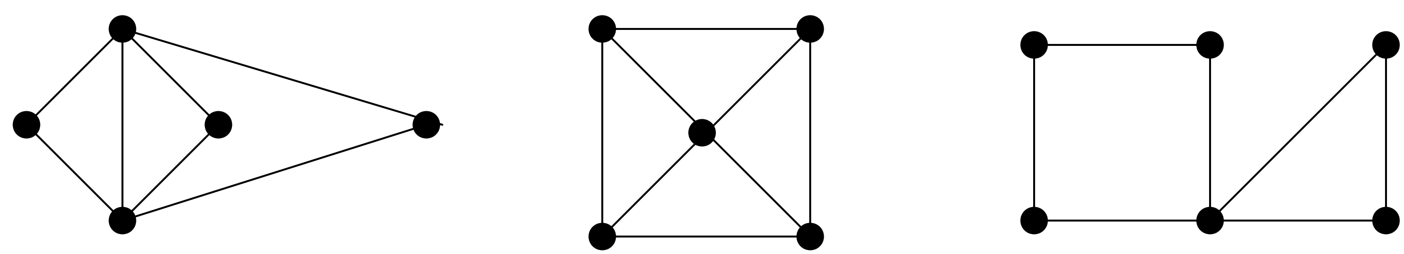
**Przykład** Zwarte pokolorowanie drzewa.



# Kolorowanie zwarte

**Tw.** *Grafy dające się pokolorować w sposób zwarty są grafami klasy* 1.
**Dowód:**
Niech $c$ będzie zwartym pokolorowaniem grafu $G$. Definiujemy funkcję $g$: $E \rightarrow \{0,...,\Delta - 1\}$ następująco: $g(e) = c(e) \bmod \Delta$ dla każdej krawędzi $e$. Tak określona funkcja $g$ jest pokolorowaniem krawędzi grafu, ponieważ zbiór kolorów przydzielonych krawędziom incydentnym do wolnego wierzchołka $v$ jest przedziałem o mocy nie większej niż $\Delta$.

**Przykład:** Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa:

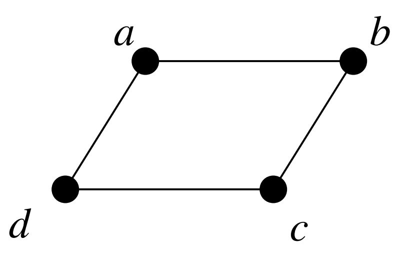


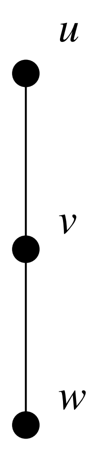
# Iloczyn kartezjański grafów

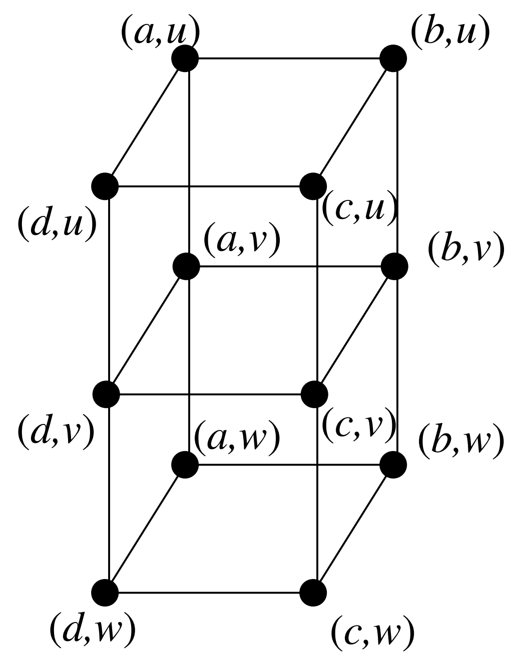
**Def.** Niech będą dane grafy $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. *Iloczyn kartezjański* $G_1 \times G_2$ to graf o zbiorze wierzchołków $V_1 \times V_2$ i zbiorze krawędzi

$$E(G_1 \times G_2) = \{\{(v_1, v_2), (u_1, u_2)\} : (v_1 = u_1 \wedge \{v_2, u_2\} \in E_2) \vee$$
$$(v_2 = u_2 \wedge \{v_1, u_1\} \in E_1)\}.$$

**Przykład:** Wyznaczmy graf $C_4 \times P_3$.



# Kolorowanie zwarte

**Tw.** *Załóżmy, że grafy* $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ *mają zwarte pokolorowania* $c_1$ *oraz* $c_2$, *zużywające odpowiednio* $r_1$ *i* $r_2$ *kolorów. Wówczas* $G_1 \times G_2$ *można pokolorować zwarcie za pomocą* $r_1 + r_2$ *kolorów.*

**Dowód:** Dla dowolnego wierzchołka $v_j \in V_i$, $i = 1,2$ definiujemy liczby:

$$\mathrm{minc}_i(v_i) = \min\{ c(\{v,u\}): \{v,u\} \in E_i \},$$

$$\mathrm{maxc}_i(v_i) = \max\{ c(\{v,u\}): \{v,u\} \in E_i \}.$$

Określamy pokolorowanie grafu $G_1 \times G_2$ definiując kolor dla każdej krawędzi:

- krawędź postaci $\{(v,u),(w,u)\}$, gdzie $\{v,w\} \in E_1$ otrzymuje kolor $c_1(\{v,w\})+\mathrm{minc}_2(u)$,
- krawędź postaci $\{(v,u),(v,w)\}$, gdzie $\{u,w\} \in E_2$ otrzymuje kolor $c_2(\{u,w\})+\mathrm{maxc}_1(v)+1$.

Krawędzie pierwszego typu otrzymują parami różne kolory tworzące przedział $\{\mathrm{minc}_1(v)+\mathrm{minc}_2(u), ..., \mathrm{maxc}_1(v)+\mathrm{minc}_2(u)\}$.

Krawędzie drugiego typu otrzymują parami różne kolory tworzące przedział $\{\mathrm{minc}_2(u)+\mathrm{maxc}_1(v)+1, ..., \mathrm{maxc}_2(u)+\mathrm{maxc}_1(v)+1\}$.

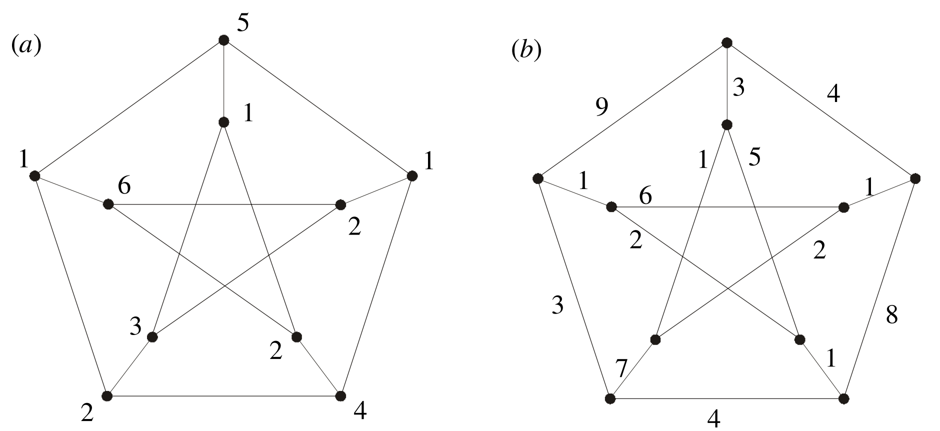
# Kolorowanie uporządkowane

**Def.** Funkcja $c$: $V(G)\rightarrow\{0,...,k\}$ jest *uporządkowanym k-pokolorowaniem* wierzchołków grafu $G$, jeśli każda ścieżka łącząca wierzchołki $u,v$ takie, że $c(u) = c(v)$ zawiera wierzchołek $w$ o kolorze $c(w) > c(u)$. Najmniejszą liczbę $k$, dla której istnieje uporządkowane $k$-pokolorowanie grafu $G$ nazywamy *uporządkowaną liczbą chromatyczną* grafu $G$ i oznaczamy symbolem $\chi_r(G)$. *Uporządkowane kolorowanie krawędzi* grafu to kolorowanie wierzchołków grafu krawędziowego.*Uporządkowany indeks chromatyczny* (najmniejsze $k$, dla którego istnieje pokolorowanie krawędzi za pomocą $k$ kolorów) oznaczamy symbolem$\chi_r^{'}(G)$.

**Fakt.** *Jeśli G jest grafem spójnym, to w każdym jego uporządkowanym k-pokolorowaniu kolor k jest użyty jednokrotnie.*

# Kolorowanie uporządkowane

**Przykład:** Optymalne (używające minimalną liczbę kolorów) pokolorowania grafu Petersena.




**Lemat** *Zbiór kolorów S użytych jednokrotnie w uporządkowanym pokolorowaniu grafu G stanowi jego separator lub* $S = V(G)$.

**Wniosek** *Jeśli* $G \neq K_n$, *to powyższy zbiór S jest separatorem.*

# Kolorowanie uporządkowane

**Tw.** *Jeśli* $G \neq K_n$*, to zachodzi wzór*

$$\chi(G) = \min_{S \in Sep(G)} \{|S| + \max\{\chi(G_1),\ldots,\chi(G_j)\}\},$$

*gdzie* $Sep(G)$ *jest zbiorem wszystkich minimalnych separatorów grafu G (przez separator minimalny S rozumiemy taki, że żaden właściwy podzbiór S nie jest separatorem w G) oraz* $G_1,\ldots,G_j$ *są składowymi spójności grafu* $G - S$.

**Dowód:**

- wiemy, że zbiór jednokrotnie użytych kolorów stanowi separator $S'$,
- jeśli istnieje wierzchołek $v$ w $S'$ taki, że $S' \setminus \{v\}$ jest separatorem w $G$, to usuwamy $v$ z $S'$,
- powyższy krok powtarzamy, aż dla każdego $v \in S'$ mamy, że $S' \setminus \{v\}$ nie jest separatorem, co oznacza, że separator $S'$ jest minimalny,
- uwzględniając, że $\chi_r(K_n) = n$ oraz korzystając z powyższych faktów można twierdzenie dowieść indukcyjnie względem $n$.

# Kolorowanie uporządkowane

**Tw.** *Zachodzą następujące wzory*:

$$\chi(P_n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$
$$\chi(C_n) = \lfloor \log_2 (n-1) \rfloor + 2,$$
$$\chi(W_n) = \lfloor \log_2 (n-2) \rfloor + 3,$$
$$\chi(K_{r_1,\ldots,r_s}) = n - \max\{r_1,\ldots,r_s\} + 1,$$
$$\chi(T) \le \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$

*gdzie T jest drzewem.*

**Tw.** $\chi_r(P_n \times P_n) \ge n$.

**Wniosek** *Istnieją grafy planarne dla których* $\chi_r \ge \sqrt{n}$.

# Kolorowanie ścieżek

**Def.** Ścieżki $P_1$, $P_2$ nazywamy *kolidującymi* w $G$, jeśli zawierają wspólną krawędź.

**Def.** Niech $G$ będzie grafem prostym, natomiast $P$ pewnym zbiorem (multizbiorem) ścieżek w $G$. Przyporządkowanie ścieżkom w $P$ liczb naturalnych $1,...,k$ nazywamy *k-pokolorowaniem* zbioru $P$, o ile dowolne dwie kolidujące ścieżki otrzymują różne barwy.

**Def.** Jeśli $G$ jest grafem oraz $P$ zbiorem ścieżek w $G$, to *grafem konfliktów* jest graf, którego wierzchołki odpowiadają ścieżkom w $P$. Dwa wierzchołki w grafie konfliktów są sąsiednie, jeśli odpowiadające im ścieżki są kolidujące.

**Uwaga** *Problem optymalnego* (*używającego minimalnej liczby kolorów*) *pokolorowania zbioru P jest równoważny problemowi optymalnego kolorowania wierzchołków grafu konfliktów.*

# Kolorowanie ścieżek

**Def.** Jeśli $G$ jest grafem, a $P$ zbiorem ścieżek w $G$, to $\chi_G(P)$ jest najmniejszą liczbą naturalną $k$, dla której istnieje $k$-pokolorowanie zbioru $P$.

**Def.** Dla $G$ oraz $P$ definiujemy *obciążenie krawędzi e* jako liczbę ścieżek zawierających $e$ i oznaczamy symbolem $L_G(e,P)$. *Obciążeniem* $L_G(P)$ *zbioru* $P$ definiujemy następująco:

$$L_G(P) = \max_{e \in E(G)} \{L_G(e,P)\}.$$

**Lemat** $\chi_G(P) \geq L(P)$.

**Przykład:** Graf $S_4 = (\{a,b,c,d\}, \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\}\})$ oraz zbiór $P = \{$ *b-a-c, b-a-d, c-a-d* $\}$ to przykład, gdy powyższa nierówność jest ostra.

**Uwaga:** Powyższe pojęcia można w naturalny sposób uogólnić na przypadek digrafów.

# Kolorowanie ścieżek

**Def.** *Zgłoszeniem* na grafie $G$ nazywamy dowolną uporządkowaną parę wierzchołków $(u,v)$. W przypadku grafów nieskierowanych zgłoszenia $(u,v)$ oraz $(v,u)$ są tożsame.

**Def.** Niech $R$ będzie zbiorem zgłoszeń na grafie $G$. Routing zbioru $R$ polega na wyborze takiego zbioru ścieżek $P_R$, że każda ścieżka z $P_R$ realizuje jedno zgłoszenie z $R$, oraz znalezieniu optymalnego pokolorowania tego zbioru ścieżek. Definiujemy

$$\chi(R) = \min_{P_R}\{\chi(P_R)\} - \text{liczba chromatyczna},$$
$$L(R) = \min_{P_R}\{L(P_R)\} - \text{obciazenie},$$

gdzie min są liczone po wszystkich możliwych zbiorach realizujących $R$. Problem routingu polega na minimalizacji $\chi(R)$.

**Uwaga** $\chi(R) \geq L(R)$.

# Kolorowanie ścieżek

**Uwaga** Problem routingu dla digrafów definiujemy analogicznie. Kolejność wierzchołków w zgłoszeniu jest w tym przypadku istotna.

**Def.** Dla digrafu $D = (V, A)$ definiujemy graf prosty $G(D) = (V, E)$:

$$\{u,v\} \in E \Leftrightarrow ( (u,v) \in A \text{ lub } (v,u) \in A ).$$

**Tw.** *Dla dowolnego digrafu D zachodzi*

$$2L_D(R) \geq L_{G(D)}(R) \geq L_D(R).$$

**Przykład:** Lewa nierówność jest osiągana dla gwiazdy $S_4 = (\{a,b,c,d\}, \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\}\})$ digrafu $D_4$, gdzie $A = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (c,a), (d,a)\}$ oraz zbioru zgłoszeń $R = \{(b,c), (c,d), (d,b)\}$.

**Tw.** $\chi_D(R) \leq \chi_{G(D)}(R)$.

**Tw.** *Jeśli G,R,P to, odpowiednio, graf, zbiór zgłoszeń oraz zbiór ścieżek, to*

$$\chi_G(R) \leq 2\sqrt{|E(G)|}L(R),$$

$$\chi_G(R) \leq (L(P)-1)l+1, \text{ gdzie } l \text{ to maksymalna długość ścieżki w } P.$$

# Kolorowanie ścieżek

**Tw.** *Jeśli G jest drogą, to dla dowolnego zbioru ścieżek P zachodzi równość* $\chi(P) = L(P)$.

**Wniosek** *Istnieje wielomianowy algorytm rozwiązujący problem kolorowania ścieżek w przypadku gdy G jest ścieżką.*

**Tw.** *Niech G będzie grafem prostym. Równość* $\chi(P) = L(P)$ *jest spełniona dla dowolnego zbioru ścieżek w G wtedy i tylko wtedy, gdy G jest drogą.*

**Tw.** *Jeśli G jest cyklem, to dla dowolnego zbioru zgłoszeń R zachodzi*

$$\chi(R) \leq 2L(R).$$

**Wniosek** *Dla zadanego zbioru ścieżek w cyklu* $C_n$ *istnieje wielomianowy 2-przybliżony algorytm kolorowania zbioru ścieżek P.*

# Wybrane zastosowania

# Kolorowanie ścieżek – sieci optyczne

- pojedyncze włókno przenosi sygnały o różnych długościach fal, więc jedno połączenie pomiędzy węzłami umożliwia przesłanie wielu strumieni danych,
- długość fali dla danego pakietu danych jest ustalana przed transmisją,
- pakiety danych oczekujące na transmisję wysyłają zgłoszenia i rozwiązywany jest problem routingu,
- kolory ścieżek = długości fal

Uogólnienia:
- stosunkowo niewielkim kosztem można dokonać zmiany długości fali w węźle pośrednim, więc różne fragmenty ścieżki mogą otrzymywać różne kolory,
- jeśli istnieje kilka połączeń pomiędzy parą węzłów, to w ograniczonym zakresie pozwalamy na użycie tej samej barwy dla kilku kolidujących ścieżek,

# Kolorowanie sumacyjne – szeregowanie zadań

- danych jest $n$ zadań $J_1,...,J_n$,
- każde zadanie wymaga dostępu do podzbioru zasobów $M_1,...,M_n$,
- czasy wykonywania zadań są jednostkowe,
- przez *konflikt* rozumiemy sytuację, w której dwa zadania $J_i,J_j$ wykonują się w tym samym czasie i wymagają dostępu do wspólnego zasobu, tzn. $M_i \cap M_j \neq \emptyset$,
- dążymy do znalezienia takiego harmonogramu, aby nie występowały konflikty oraz średni czas oczekiwania zadania na wykonanie był minimalny,
- tworzymy graf konfliktów, którego wierzchołki odpowiadają zadaniom oraz pomiędzy wierzchołkami $J_i,J_j$ istnieje krawędź, o ile $M_i \cap M_j \neq \emptyset$,
- znajdujemy optymalne sumacyjne pokolorowanie $c$ grafu konfliktów; wówczas zadanie $J_i$ wykonywane jest w przedziale czasu $[c(J_i) - 1, c(J_i)]$,

# Kolorowanie uporządkowane – relacyjne bazy danych

- dane jest zapytanie do relacyjnej bazy danych,
- zamierzamy uszeregować złączenia poszczególnych relacji w taki sposób, że w danej turze (przedziale czasowym) można wykonać dwie operacje złączenia relacji, jeśli żadna relacja nie uczestniczy w obu złączeniach,
- minimalizujemy liczbę tur potrzebnych na złączenie wszystkich relacji (≈czas potrzebny na wykonanie zapytania),
- w tym celu tworzymy graf $G$ (ang. *qurey graph*), którego wierzchołki odpowiadają relacjom oraz krawędzie operacjom złączenia,
- znajdujemy drzewo spinające $T$ grafu $G$, którego uporządkowany indeks chromatyczny jest minimalny,
- kolorujemy $T$ w sposób uporządkowany,
- wówczas kolor przydzielony krawędzi oznacza turę, w której należy wykonać odpowiadające jej złączenie tabel; stąd, liczba kolorów jest równa liczbie tur,