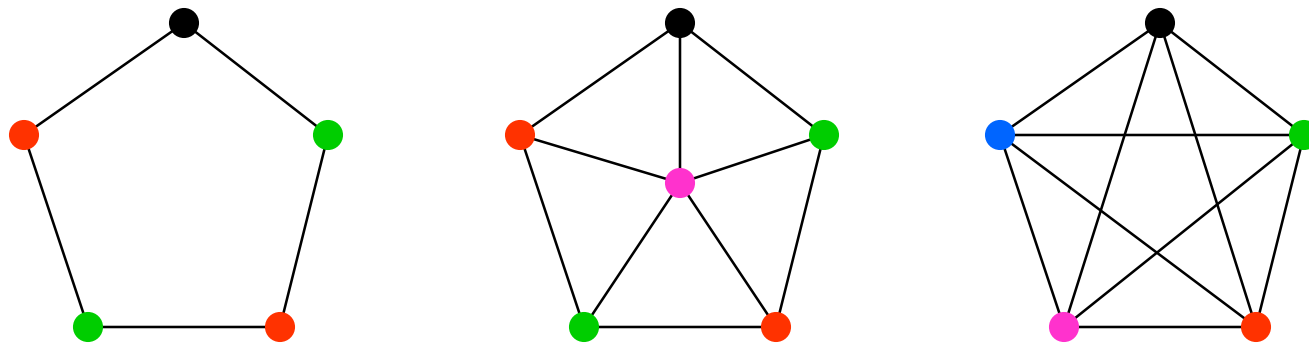


Kolorowanie wierzchołków

Def. Niech G będzie grafem prostym. Przez *kolorowanie wierzchołków* rozumiemy takie etykietowanie elementów $V(G)$ liczbami naturalnymi, że sąsiednie wierzchołki otrzymują różne liczby (kolory, etykiety).

Def. *Liczba chromatyczna* grafu G jest to najmniejsza liczba k taka, że istnieje pokolorowanie G za pomocą k kolorów i jest oznaczana symbolem $\chi(G)$.

Przykład Optymalne (zużywające minimalną liczbę kolorów) pokolorowania grafów C_5 , W_6 , K_5 .



Kolorowanie wierzchołków

Uwaga Problem wyznaczania liczby chromatycznej jest w ogólności NP-trudny. Zatem, w praktyce użyteczne są oszacowania.

Def. *Kliką* grafu G nazywamy jego podgraf pełny.

Lemat *Prawdziwe jest następujące oszacowanie dolne:*

$$\chi(G) \geq \omega,$$

gdzie ω jest rozmiarem maksymalnej kliky grafu G .

Uwaga Powyższe oszacowanie ma dwie wady:

- ω jest parametrem trudnym do wyliczenia. Ze związku $\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \omega$ otrzymujemy oszacowanie mniej dokładne, lecz łatwe do obliczenia.
- różnica pomiędzy $\chi(G)$ a ω może być dowolnie duża, na co przykładem są grafy Mycielskiego.

Kolorowanie wierzchołków

Tw. *Dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ zachodzi oszacowanie $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Dowód: Przeprowadzimy indukcję względem n .

- Jeśli $n = 1$, to nierówność oczywiście zachodzi.
- Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n > 0$.
- Dowodzimy przypadek, gdy graf G ma $n + 1$ wierzchołków. Usuńmy z G dowolny wierzchołek v . Dla grafu $G - v$ z założenia indukcyjnego mamy: $\chi(G - v) \leq \Delta + 1$. Wierzchołek v ma w grafie G co najwyżej Δ sąsiadów, więc jeden spośród $\Delta + 1$ kolorów jest dla v dostępny, co pozwala uzyskać pokolorowanie G za pomocą co najwyżej $\Delta + 1$ barw.

Tw (Brooks, 1941) *Istnieją dwie klasy grafów, dla których $\chi(G) = \Delta + 1$: grafy pełne oraz cykle o nieparzystej liczbie wierzchołków.*

Wniosek *Jeśli $G \neq K_n$ oraz $\Delta \geq 3$, to $\chi(G) \leq \Delta$.*

Kolorowanie wierzchołków

Uwaga Oszacowanie $\chi(G) \leq \Delta$ może być bardzo niedokładne, zwłaszcza dla gwiazd, dla których $\chi(K_{1,s}) = 2$ oraz $\Delta(K_{1,s}) = s$.

Tw. Dla grafu G o m krawędziach zachodzą oszacowania:

$$\chi(G) \leq \sqrt{2m} + 1,$$

$$\chi(G) \leq \lambda + 1,$$

gdzie λ jest długością najdłuższej drogi w grafie G .

Uwaga Pierwsze z powyższych oszacowań może być niedokładne, gdyż dla grafów pełnych dwudzielnych $K_{k,k}$ różnica

$$\sqrt{2k^2} + 1 - \chi(G) = \sqrt{2k} - 1$$

może przyjmować dowolnie dużą wartość.

Uwaga Drugie z oszacowań jest niedokładne dla ścieżki P_n , dla której $\chi(P_n) = 2$ oraz $\lambda(P_n) = n - 1$.

Kolorowanie grafów planarnych

Tw. *Każdy graf planarny jest 6-barwny.*

Dowód: Zastosujemy indukcję względem liczby wierzchołków grafu.

- Jeśli $n = 1$, to twierdzenie jest oczywiście prawdziwe.
- Zakładamy, że własność zachodzi dla wszystkich $(n-1)$ -wierzchołkowych grafów planarnych.
- Niech G będzie grafem planarnym o n wierzchołkach. Wiemy, że G posiada co najmniej jeden pąk v (wierzchołek o stopniu mniejszym lub równym 5). Po usunięciu v mamy $(n - 1)$ -wierzchołkowy graf planarny $G - v$, do którego stosujemy założenie indukcyjne otrzymując jego 6-pokolorowanie. Wierzchołek v ma w G co najwyżej 5 sąsiadów, więc jeden z sześciu kolorów będzie dla v dostępny. Stąd G jest 6-barwny.

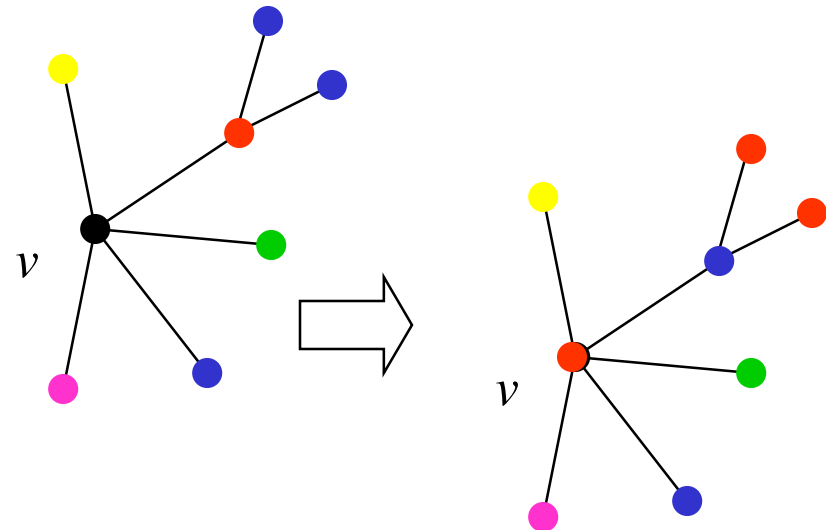
Kolorowanie grafów planarnych

Tw. (Heawood, 1890) *Każdy graf planarny jest 5-barwny.*

Dowód: Podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, stosujemy indukcję względem n . Jeśli wyznaczymy (z zał. ind.) 5-pokolorowanie $G - v$ (gdzie v jest pąkiem) i wierzchołek v jest incydentny z co najwyżej 4 kolorami, to twierdzenie zachodzi. W przeciwnym wypadku rozważamy 2 sytuacje (kolory 1 – czerwony, 2 – zielony, 3 – niebieski, 4 – fioletowy):

Przypadek 1:

- Wierzchołki o kolorach 1,3 (sąsiedzi v) należą do różnych składowych grafu indukowanego przez wierzchołki o kolorach 1,3 (w całym grafie $G - v$)
- Wtedy zamieniamy kolory 1 i 3 w składowej zawierającej wierzchołek o kolorze 1 (sąsiedni z v)
- v otrzymuje kolor 1

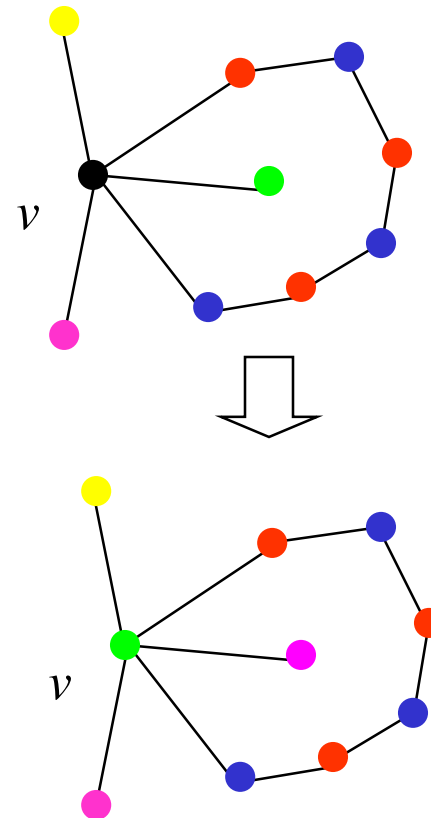


Kolorowanie grafów planarnych

Dowód (c.d.):

Przypadek 2:

- Wierzchołki o kolorach 1,3 (sąsiedzi v) wraz z v tworzą cykl w G
- Wtedy w składowej spójności zawierającej sąsiada v o kolorze 2 możemy zamienić kolory 2 i 4
- v otrzymuje kolor 2



Tw. (Appel, Haken + komputer, 1976) *Każdy graf planarny jest 4-barwny.*

Algorytmy przybliżone

Przez $A(G)$ oznaczmy liczbę kolorów, którą algorytm A używa podczas kolorowania grafu G . Wyróżniamy następujące parametry, uwzględniane podczas opisu algorytmu przybliżonego A :

1) Złożoność obliczeniowa.

2) *Funkcja dobroci* zdefiniowana jako:

$$A(n) = \max \{ A(G)/\chi(G) : G \text{ ma } n \text{ wierzchołków} \}.$$

Najgorszą możliwą funkcją dobroci jest $A(n)=n$, najlepszą zaś $A(n)=1$.

3) Najmniejszy *dość trudny* graf – najmniejszy graf G , dla którego algorytm może użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

4) Najmniejszy *trudny* graf – najmniejszy graf G , dla którego algorytm musi użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

Algorytm sekwencyjny

Algorytm sekwencyjny S można opisać następująco:

- Uporządkuj w dowolny sposób wierzchołki grafu G v_1, \dots, v_n .
- Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

- 1) algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu
- 2) Ścieżka P_4 jest najmniejszym dość trudnym grafem
- 3) Graf trudny nie istnieje
- 4) Funkcja dobroci jest liniowa. Jej oczekiwana wartość wynika z oszacowania: $S(G) \leq (2 + \varepsilon) \chi(G)$
- 5) Złożoność $O(n + m)$

Algorytm LF

Algorytm LF (largest first) można opisać następująco:

- Uporządkuj wierzchołki grafu G nierosnąco według stopni v_1, \dots, v_n .
- Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

- 1) algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu
- 2) Ścieżka P_6 jest najmniejszym dość trudnym grafem:

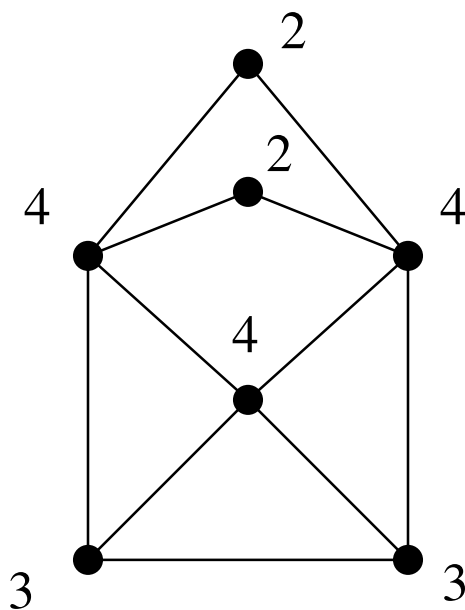


Kolejność wierzchołków: $v_2, v_5, v_3, v_4, v_1, v_6$.

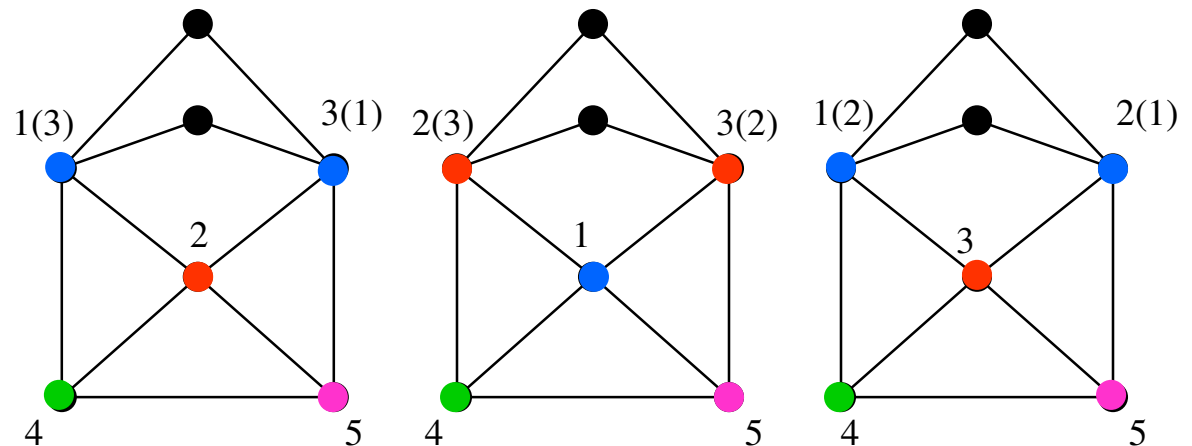
Algorytm *LF*

Własności algorytm *LF* (c.d.):

3) najmniejszym trudnym grafem do kolorowania jest „koperta”, która jest grafem 3-barwnym, natomiast *LF* zużywa czterech kolorów:



„Koperta” wraz z oznaczonymi stopniami wierzchołków

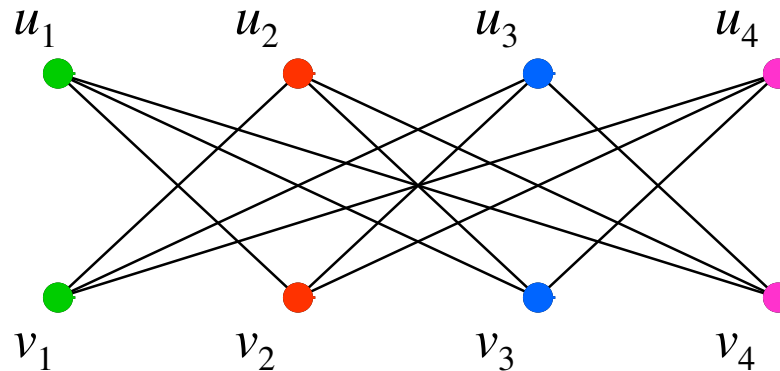


- Szeregujemy wierzchołki stopnia 4
- Kolorujemy te wierzchołki
- W każdym przypadku wybór wierzch. stopnia 3 jest symetryczny
- We wszystkich przyp. wymagany kolor nr 4

Algorytm LF

Własności algorytm LF (cd.):

4) funkcja dobroci to $O(n)$. Zdefiniujmy k -ty graf Johnsona J_k jako $K_{k,k} - M$, gdzie $M = \{\{u_i, v_i\} : u_i \in V_1(K_{k,k}), v_i \in V_2(K_{k,k})\}$. Przykład grafu J_4 pokazuje rysunek (wraz z pokolorowaniem utworzonym przez algorytm LF).



$\chi(J_k) = 2$, gdyż grafy Johnsona są dwudzielne. Dla permutacji wierzchołków $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ algorytm LF używa k kolorów.

Stąd

$$\frac{LF(J_k)}{\chi(J_k)} = \frac{n/2}{2} = \frac{n}{4}$$

Algorytm *SL*

Algorytm *SL* (smallest last) składa się z dwóch etapów:

- 1) faza redukcji grafu: znajdujemy wierzchołek o minimalnym stopniu i usuwamy go z grafu (powtarzamy dopóki graf nie jest pusty).
- 2) kolorujemy wierzchołki zachłannie w kolejności ustalonej w poprzednim kroku, zaczynając od wierzchołków usuwanych później.

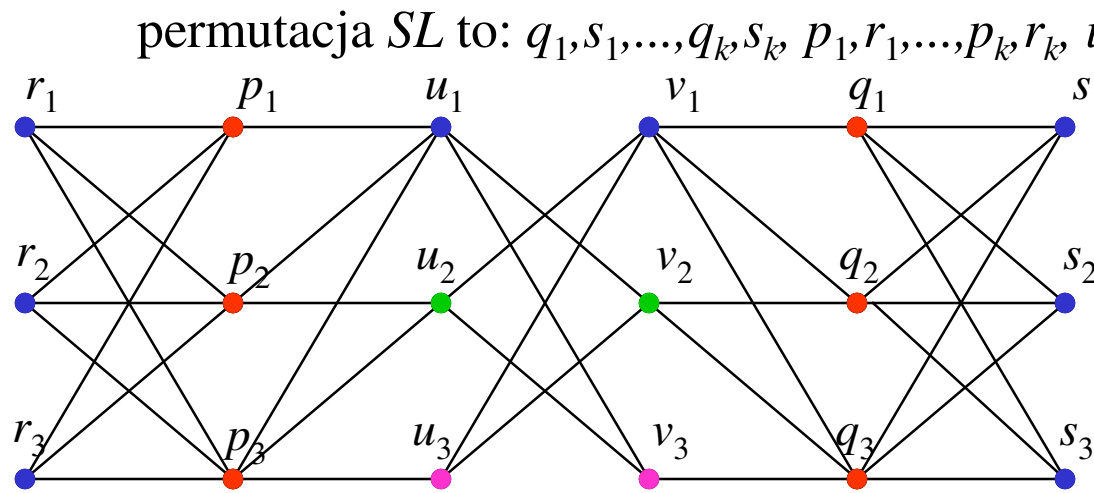
Własności:

- Algorytm statyczny
- Złożoność algorytmu: $O(n + m)$
- Funkcja dobroci jest liniowa
- Przypadki pozytywne: drzewa, cykle, grafy jednocykliczne, kola, grafy Mycielskiego, grafy Johnsona, grafy planarne

Algorytm *SL*

Własności (cd.) :

- Przypadki półpozytywne: grafy planarne (za pomocą sześciu kolorów w czasie $O(n)$)
- Przypadki negatywne: grafy dwudzielne, grafy Colemana-Moore'a



$$SL(CM_3) = 4$$

Ogólnie:

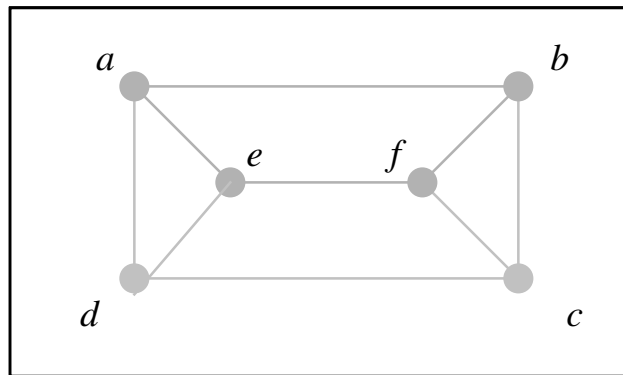
$$SL(CM_k) = k+1$$

$$\chi(CM_k) = 2$$

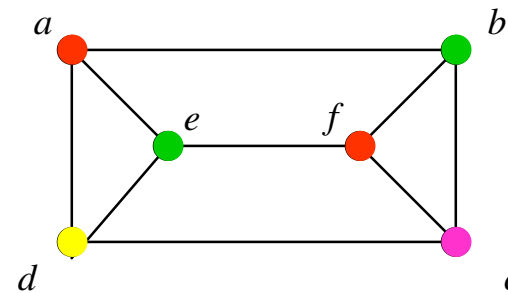
Algorytm *SL*

Własności algorytmu (cd.):

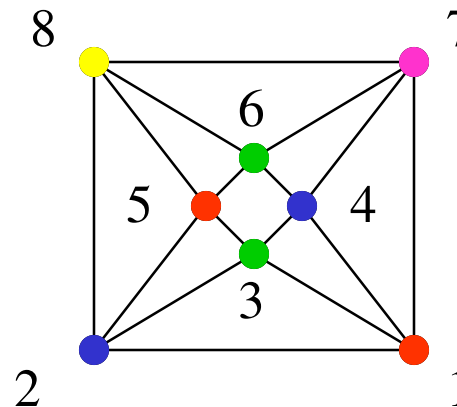
- Najmniejszym dość trudnym grafem jest „pryzma”



Permutacja: $a \ b \ f \ e \ c \ d$



- Najmniejszym trudnym grafem jest „pryzmatoid”:



Algorytm *SLF*

Algorytm *SLF* (saturacyjny LF) można opisać następująco:

```
while istnieją niepokolorowane wierzchołki do begin  
    znajdź wierzchołek o maksymalnym stopniu spośród  
    wierzchołków o maksymalnym stopniu nasycenia;  
    pokoloruj znaleziony wierzchołek zachłannie;  
end
```

Uwaga *Stopień nasycenia* wierzchołka to ilość różnych kolorów incydentnych z tym wierzchołkiem.

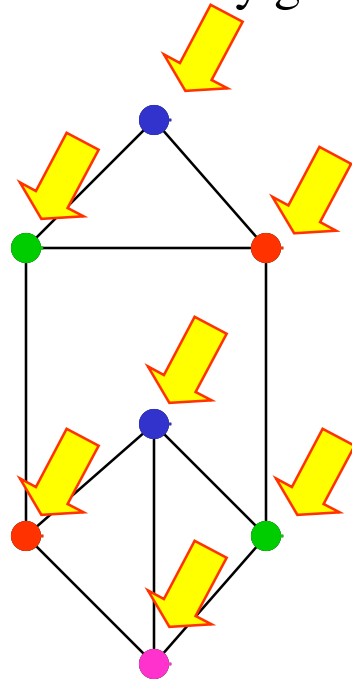
- Przypadki pozytywne: grafy dwudzielne (w tym drzewa i grafy Johnsona), cykle, koła, kaktusy
- Przypadki negatywne: grafy trójdzielne

Algorytm *SLF*

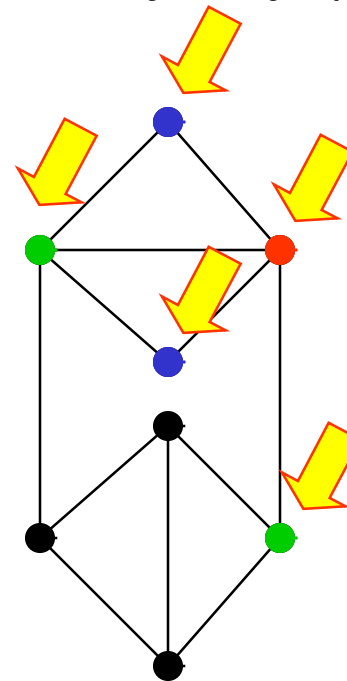
Własności algorytmu:

- Złożoność: $O(m \log n)$

- Najmniejszy dość
trudny graf:



- Najmniejszy trudny graf:



Pozostałe wierzchołki mogą być kolorowane w dowolnej kolejności, co zawsze prowadzi do użycia czwartego koloru.

Kolorowanie krawędzi

Def. Funkcja $c:E(G)\rightarrow\{1,\dots,k\}$ jest k -pokolorowaniem krawędziowym grafu G , o ile dla każdej pary sąsiednich krawędzi e i e' zachodzi $c(e)\neq c(e')$. Najmniejsze k , dla którego istnieje krawędziowe k -pokolorowanie nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy symbolem $\chi'(G)$

Uwaga Pokolorowanie wierzchołków oznaczało rozbięcie V na zbiory niezależne, natomiast pokolorowanie krawędzi k kolorami jest rozbięciem grafu na k skojarzeń.

Uwaga Problem kolorowania krawędzi jest równoważny kolorowaniu wierzchołków grafu krawędziowego.

Przykład $\chi'(G) = 2$ dla ścieżek i cykli parzystych

$\chi'(G) = 3$ dla drzew binarnych o $\Delta > 2$ i cykli nieparzystych

Oszacowania dolne

Tw. *Zachodzi oszacowanie $\Delta \leq \chi'(G)$*

Dowód: Wynika stąd, iż wszystkie krawędzie incydentne z tym samym wierzchołkiem muszą otrzymać parami różne kolory.

Tw. *Zachodzi oszacowanie $\lceil m/t \rceil \leq \chi'(G)$, gdzie t jest rozmiarem maksymalnego skojarzenia.*

Dowód:

- Niech będzie dane pewne pokolorowanie grafu G .
- Zauważmy, że każdy z k kolorów jest przydzielony co najwyżej t krawędziom grafu G .
- Redukujemy graf, usuwając krawędzie o pewnym ustalonym kolorze.
- W każdym takim kroku usuniemy co najwyżej t krawędzi, co oznacza, że musimy wykonać co najmniej $\lceil m/t \rceil$ powyższych kroków, aby zredukować graf do grafu pustego.
- Ilość kroków jest równa ilości kolorów, co kończy dowód.

Oszacowania górne

Tw. $\chi'(G) \leq \max\{\Delta, \lfloor \deg(u) + \deg(v) + \deg(w)/2 \rfloor\}$, gdzie maksimum jest obliczane względem wszystkich dróg elementarnych długości 2.

Tw (Shannon, 1949). $\chi'(G) \leq 3\Delta/2$

Tw (Vizing, 1964). $\chi'(G) \leq \Delta + \mu$, gdzie μ jest maksymalnym zwielokrotnieniem krawędzi w grafie, tzn. μ jest największą liczbą k taką, że występuje para wierzchołków połączonych k krawędziami.

Uwaga

- Dla dużych wartości parametru μ i specyficznych grafów (np. dwuwierzchołkowych), oszacowanie Vizing'a jest słabsze od oszacowania Ore'go.
- Dla $\mu = 1$ oszacowanie Vizing'a jest bardzo dokładne jako, że $\chi'(G) \geq \Delta$.

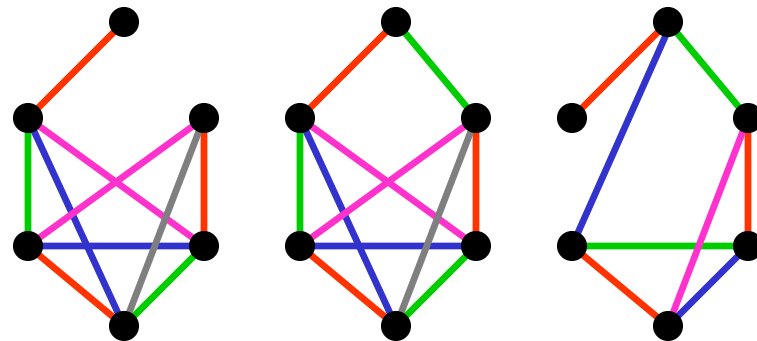
Tw. Vizinga

Wniosek Dla grafów prostych G zachodzi $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.

Uwaga

- Grafy, dla których $\chi'(G) = \Delta$ nazywamy grafami *klasy 1*. Przykłady to grafy dwudzielne, pełne o parzystej liczbie wierzchołków, planarne o $\Delta \geq 8$, nieparzystego rzędu z gwiazdą spinającą.
- Grafy *klasy 2*, to takie, dla których $\chi'(G) = \Delta + 1$. Przykładami są nieparzyste cykle, pełne nieparzystego rzędu, regularne nieparzystego rzędu.

Uwaga Grafów klasy 1 jest znacznie więcej. Np. spośród 112 grafów rzędu 6, tylko 3 są klasy 2.



Algorytm NC

Algorytm w każdym kroku wybiera dowolną krawędź i przydziela jej najniższy kolor, spośród kolorów, które nie zostały użyte do pokolorowania krawędzi sąsiednich.

Własności:

- Złożoność algorytmu to $O(m\Delta)$
- Najmniejszym dość trudnym grafem jest ścieżka P_5
- Najmniejszy trudny graf nie istnieje
- Algorytm jest 2-przybliżony, tzn. $NC(G) < 2\chi'(G)$.

Uzasadnienie: Jeśli algorytm NC koloruje pewną krawędź $e = \{u, v\}$, to w najgorszym przypadku są $\deg(u) + \deg(v) - 2$ zabronione kolory dla e .

Oznacza to, że kolor przydzielony e jest nie większy niż $\deg(u) + \deg(v) - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Stąd:} \quad NC(G) &\leq \max\{ \deg(u) + \deg(v) - 1 : \{u, v\} \in E(G) \} \\ &\leq 2\Delta - 1 < 2\Delta \leq 2\chi'(G). \end{aligned}$$

Algorytm *NTL*

Def. Kolor *brakujący dla wierzchołka* v grafu G to kolor, który nie został przydzielony żadnej krawędzi incydentnej do v . $M(v)$ oznacza zbiór wszystkich kolorów brakujących dla v .

Def. Dla każdego wierzchołka v ustalamy pewien jego kolor brakujący $m(v)$. *Wachlarzem* F przy wierzchołku v rozpoczynającym się krawędzią $\{v, w_0\}$ nazywamy taki ciąg krawędzi $\{v, w_0\}, \{v, w_1\}, \dots, \{v, w_s\}$, że $\{v, w_i\}$ ma przydzielony kolor $m(w_{i-1})$, $i > 0$. Liczba s to rozpiętość wachlarza.

Uwaga Jeśli wybrana krawędź $\{u, v\}$ nie jest pokolorowana, to każdy z wierzchołków u, v ma przynajmniej dwa kolory brakujące.

Algorytm *NTL*

Nazwa metody pochodzi od pierwszych liter nazwisk jej twórców (Nishizeki, Terada, Leven)

Procedure AlgorytmNTL(G)

begin

if $\Delta(G) \leq 2$ **then** koloruj optymalnie trawersując ścieżki i cykle;

else begin

$q := \Delta(G) + 1$; $G' := (V(G), \emptyset)$;

for każda $e \in E(G)$ **do begin**

$G' := G' + e$;

if $e = \{u, v\}$ nie może otrzymać wspólnego koloru brakującego

 w u i v **then**

 Recolor(u, v);

 koloruj e ;

end

end

end

Procedura Recolor

- zamierzamy pokolorować krawędź $\{u, v\}$;
- wyznaczamy maksymalny wachlarz F (t.ż. $w_0 = u$) przy wierzchołku v
- przypadek 1: $m(w_s) \in M(v)$, gdzie s to rozpiętość wachlarza
 - wówczas kolorujemy krawędź $\{v, w_i\}$ barwą $m(w_i)$ dla każdego $i=1, \dots, s$.
- przypadek 2: $m(w_i) \notin M(v)$
 - niech P będzie ścieżką w grafie G zaczynającą się w w_s złożoną z krawędzi pokolorowanych barwami $m(v)$ i $m(w_s)$
 - przypadek 2a: P nie osiąga wierzchołka v : wówczas zamieniamy kolory znajdujące się na ścieżce, $\{v, w_s\}$ otrzymuje kolor $m(v)$ i pozostałe krawędzie $\{v, w_i\}$ otrzymują kolory $m(w_i)$;
 - przypadek 2b: P osiąga v : niech w_j , gdzie $j \in \{0, \dots, s-2\}$ będzie wierzchołkiem takim, że $m(w_{j-1}) = m(w_s)$. Ścieżka P kończy się w wierzchołku w_j . Zmieniamy kolory wachlarza tak, że krawędź $\{v, w_i\}$ otrzymuje kolor $m(w_i)$ dla $i < j - 1$. Zamieniamy kolory na ścieżce P i ostatecznie malujemy $\{v, w_{j-1}\}$ kolorem $m(v)$.