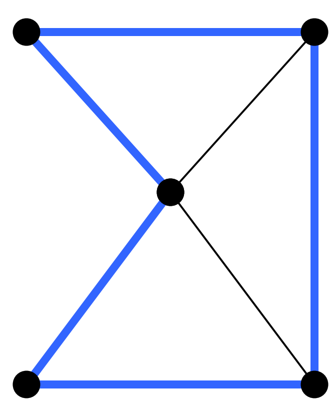
Grafy hamiltonowskie, problem komiwojażera – algorytm optymalny

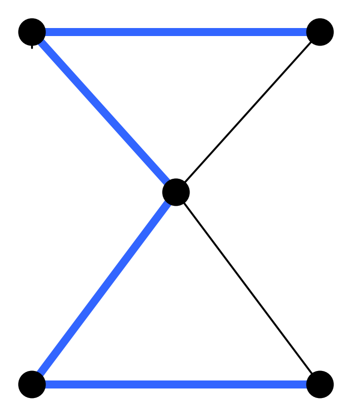
Grafy hamiltonowskie

Def. *Cykl* (*droga*) *Hamiltona* jest to cykl (droga), w którym każdy wierzchołek grafu występuje dokładnie raz. Graf jest *hamiltonowski* (*półhamiltonowski*), o ile posiada cykl (drogę) Hamiltona.

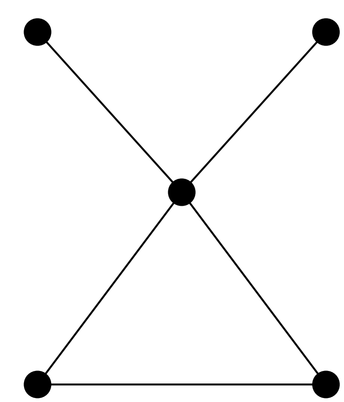
Przykład



Graf hamiltonowski



Graf półhamiltonowski

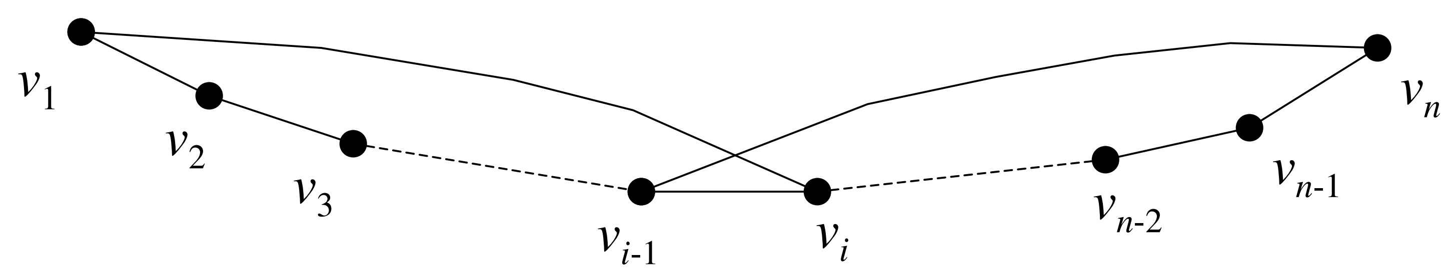


Graf nie jest ani hamiltonowski ani półhamiltonowski

Grafy hamiltonowskie

Tw. (Ore, 1960) *Jeśli G jest grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach i* $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ *dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków u i v, to graf G jest hamiltonowski*.

Dowód: Załóżmy, że istnieje graf G o podanych założeniach ale nie jest hamiltonowski. Możemy założyć, że G posiada drogę Hamiltona $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$ oraz $\{v_1, v_n\} \notin E(G)$. Stąd wynika, że $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$ a to oznacza, że istnieje indeks i taki, że $\{v_1, v_i\} \in E(G)$ oraz $\{v_{i-1}, v_n\} \in E(G)$, co pokazano na rysunku. To prowadzi do sprzeczności, gdyż $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \ldots \to v_i \to v_1$ jest cyklem Hamiltona.



Grafy hamiltonowskie

Wniosek (Dirac, 1952) *Jeśli G jest grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach i* $\deg(u) \geq n/2$ *dla każdego wierzchołka v, to G jest hamiltonowski*.

Dowód: Wynika z poprzedniego twierdzenia, gdyż $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ dla każdej pary (również niesąsiednich) wierzchołków.

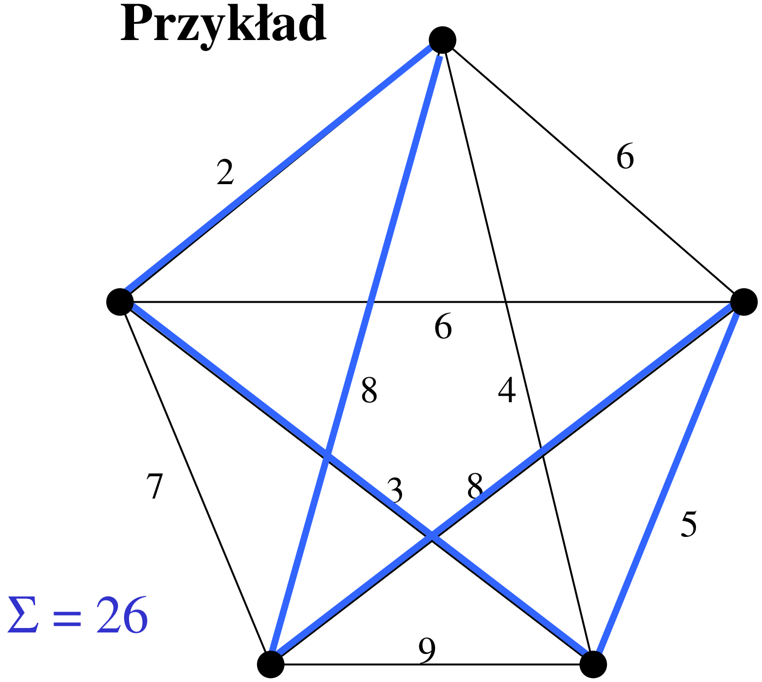
Uwaga Problem polegający na stwierdzeniu czy dany graf G jest hamiltonowski jest NP-zupełny. Oznacza to, że nie są znane efektywne (działające w czasie wielomianowym) algorytmy rozwiązujące ten problem. Nie jest również znane twierdzenie podające warunki konieczne i dostateczne na to, aby G był hamiltonowski.

Problem komiwojażera

Dany jest zbiór miast. Komiwojażer chce odwiedzić wszystkie miasta (każde dokładnie raz) i powrócić do punktu wyjścia. Problem polega na znalezieniu najkrótszej trasy o tej własności.

Zdefiniujemy powyższy problem w języku teorii grafów. Niech będzie dany graf pełny G. Zakładamy, że z każdą krawędzią e_i jest skojarzona jej waga (długość) oznaczana dalej przez w_i. Rozwiązaniem problemu komiwojażera jest taki cykl Hamiltona, którego suma wag krawędzi jest minimalna.

Przykład



Problem komiwojażera

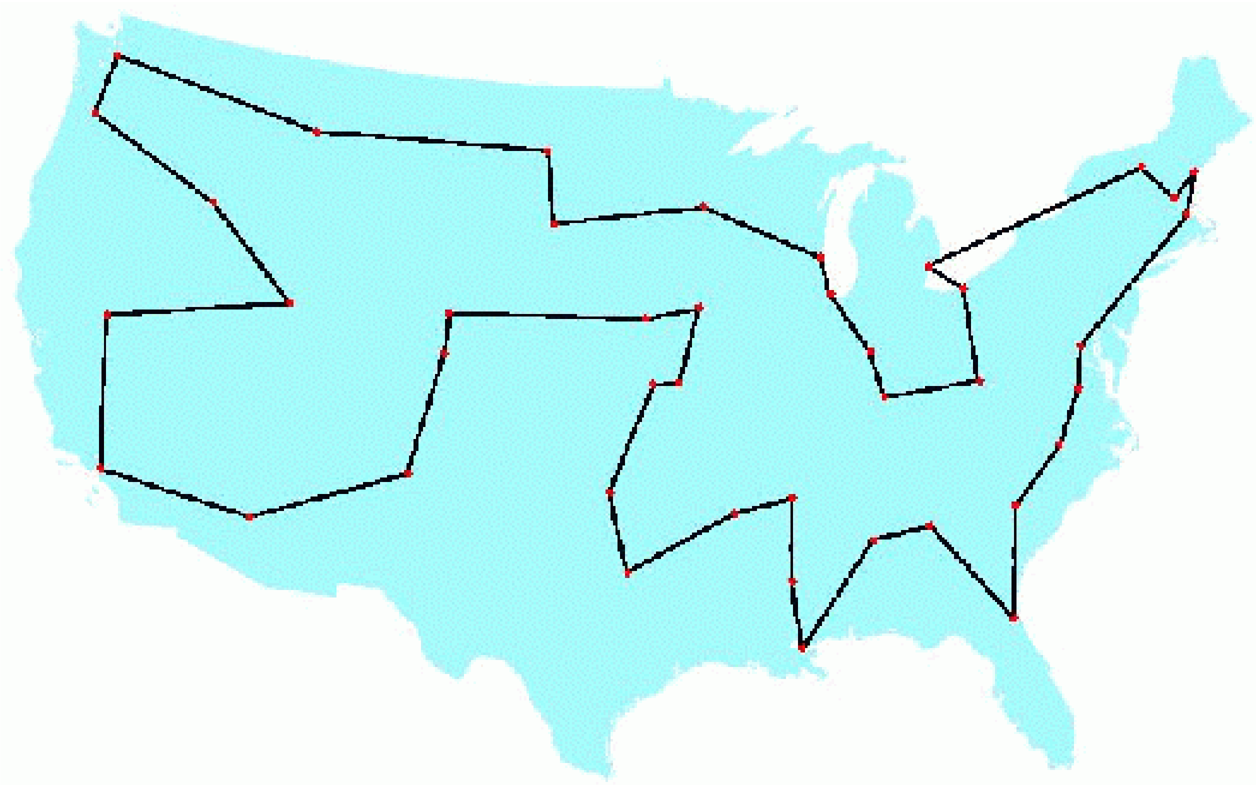
Uwagi

- problem komiwojażera jest NP-trudny, co oznacza, że nie są znane algorytmy o wielomianowej złożoności obliczeniowej rozwiązujące ten problem (przypuszczalnie takie nie istnieją)
- w praktyce jesteśmy zmuszeni posługiwać się wielomianowymi algorytmami przybliżonymi, tzn. takimi, które szybko znajdują rozwiązanie, które jest w przybliżeniu równe optymalnemu

Przykład Jednym z możliwych algorytmów dokładnych jest sprawdzenie wszystkich możliwych cykli Hamiltona i wybranie najkrótszego. Wadą takiego podejścia jest to, że liczba cykli jest zbyt duża, gdyż dla n-wierzchołkowego grafu wynosi $(n!)/2$. Stąd, jeśli dysponujemy komputerem sprawdzającym milion permutacji na sekundę, to:

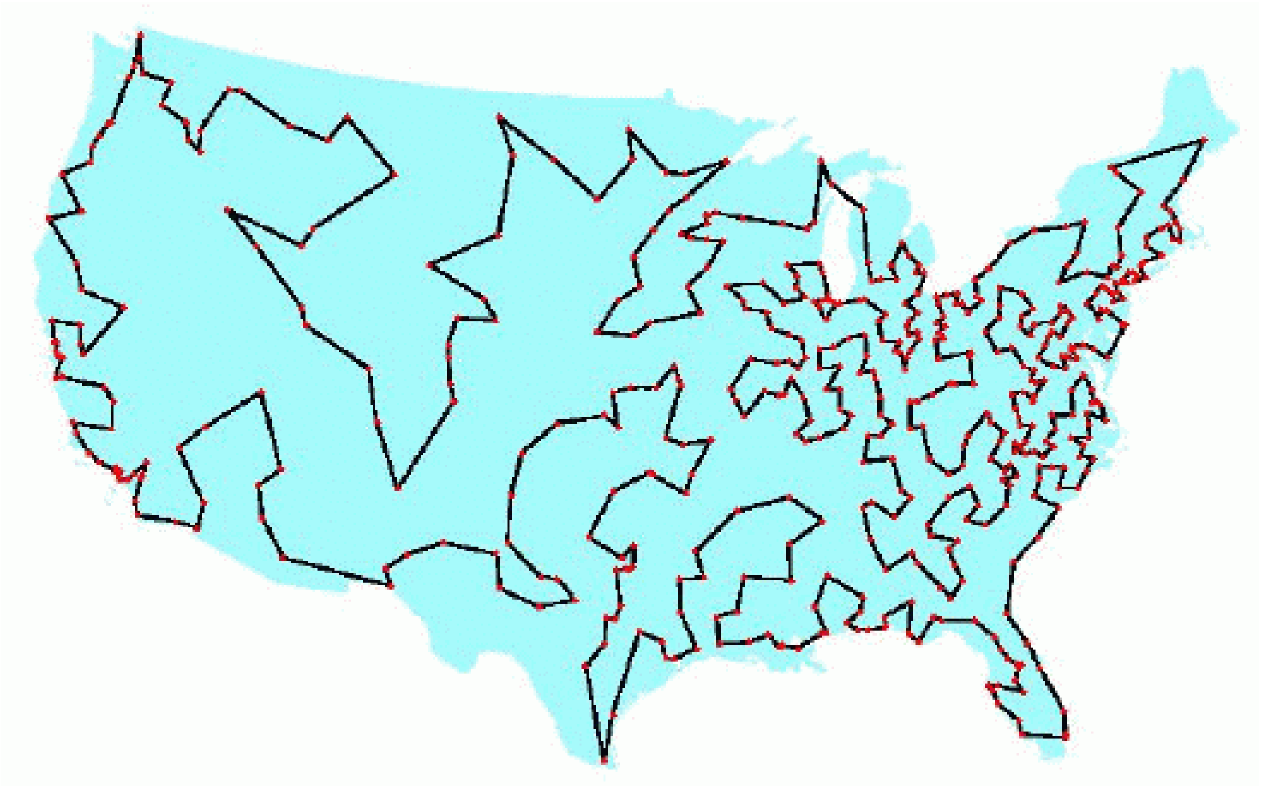
- $n = 10 \Rightarrow$ ilość cykli $= (10!)/2 = 1814400 \Rightarrow$ czas obliczeń $= 1.8$ s
- $n = 20 \Rightarrow$ ilość cykli $= (20!)/2 \approx 10^{18} \Rightarrow$ czas obliczeń ≈ 40 tys. lat

Historia problemu komiwojażera



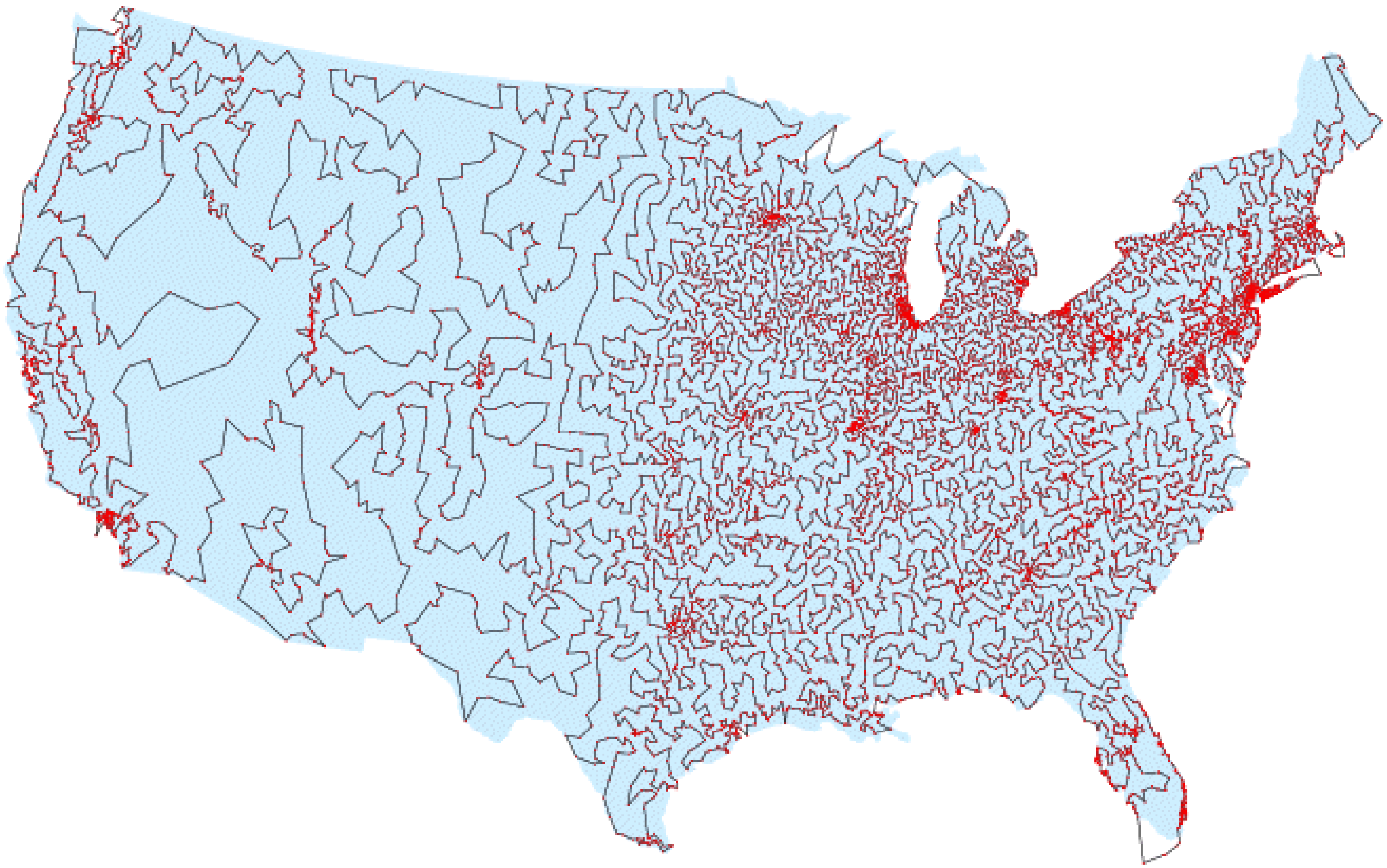
George Dantzig, Ray Fulkerson i Selmer Johnson (1954) zaprezentowali optymalne rozwiązanie problemu komiwojażera dla 49 amerykańskich miast.

Historia problemu komiwojażera



Padberg i Rinaldi (1987) obliczyli optymalne rozwiązanie dla 532 punktów

Historia problemu komiwojażera



Rozwiązanie obejmujące 13549 miast amerykańskich, uzyskane w 1998 roku.

Problem komiwojażera – algorytm optymalny

- nie jest znany żaden wielomianowy optymalny algorytm dla tego problemu i jest mało prawdopodobne, że taki algorytm w ogóle istnieje
- omówiony dalej algorytm polega na przeszukiwaniu całej przestrzeni rozwiązań
- podczas obliczeń na bieżąco uaktualniane jest dolne oszacowanie na długość optymalnej trasy, dzięki czemu wiemy, których rozwiązań częściowych na pewno nie da się rozszerzyć na rozwiązania optymalne i część obliczeń można pominąć
- rozważamy przypadek nieco ogólniejszy, w którym dany jest na wejściu obciążony graf skierowany

Drzewo przeszukiwań

Def. *Drzewo przeszukiwań* definiujemy jako zakorzenione drzewo, którego każdy wierzchołek odpowiada pewnemu podzbiorowi rozwiązań. Podzbiory rozwiązań odpowiadające synom węzła wynikają za sposobu podziału zbioru rozwiązań ojca.

Uwaga: Dla problemu komiwojażera przyjmujemy następującą postać drzewa przeszukiwań:

- każdy wierzchołek odpowiada rozwiązaniom problemu, które zawierają pewne łuki i jednocześnie innych wybranych łuków nie zawierają (np. pewnemu wierzchołkowi odpowiadają optymalne trasy zawierające łuki (a,b),(e,h) oraz nie zawierające łuków (a,d),(d,e) i (b,e))
- Każdy węzeł ma dwóch synów. Po wybraniu nowego łuku e, jeden z synów odpowiada rozwiązaniom o ograniczeniach nałożonych w ojcu oraz zawierających e, natomiast drugi – nie zawierających e.

Oszacowanie dolne

Uwaga: Podczas realizacji algorytmu (tzn. podczas trawersowania drzewa przeszukiwań) pamiętamy wartość najlepszego znalezionego dotychczas rozwiązania. Oznaczmy ją przez *min_sol*.

Uwaga: Z każdym wierzchołkiem *v* drzewa przeszukiwań jest związana zmienna *LB*. Jest to liczba, która stanowi oszacowanie dolne na wartość każdego rozwiązania należącego do tego wierzchołka. Wówczas:

- jeśli *LB* > *min_sol*, to wiemy, że nie warto przeszukiwać poddrzewa zakorzenionego w wierzchołku *v*,
- jeśli *LB* = *min_sol*, to poddrzewo być może zawiera rozwiązania dorównujące dotychczasowemu najlepszemu. Jeśli zadanie polega na wyznaczeniu dowolnego rozwiązania optymalnego, to nie przeszukujemy poddrzewa zakorzenionego w wierzchołku *v*
- jeśli *LB* < *min_sol*, to należy przeszukiwać poddrzewo zakorzenione w *v* (być może nie całe).

Redukcja macierzy

Lemat *Jeśli M jest macierzą sąsiedztwa grafu G, to:*

- *do dowolnego cyklu Hamiltona należy dokładnie jeden element z każdego wiersza M i dokładnie jeden z każdej kolumny*
- *jeśli od wszystkich elementów w wybranym wierszu* (*kolumnie*) *odejmiemy stałą d, to długość każdego cyklu Hamiltona jest o d mniejsza od długości tego samego cyklu, lecz przed odjęciem stałej*
- *jeśli od wierszy i kolumn wielokrotnie odejmiemy stałe tak,aby każdy wiersz i kolumna zawierały co najmniej jedno zero, to suma odjętych liczb stanowi dolne oszacowanie optymalnego rozwiązania.*

Def. Proces odejmowania stałych od wierszy (kolumn) macierzy sąsiedztwa nazywamy *redukcją*.

Wniosek *Jeśli łuk* (*i,j*) *należy do optymalnej trasy komiwojażera znalezionej na podstawie zredukowanej macierzy sąsiedztwa, to* (*i,j*) *należy rownież do optymalnej trasy w wyjściowym grafie.*

Algorytm redukcji

```
procedure Reduce( M )
begin
    r := 0;
    for i := 1 to n do begin
        min_row := najmniejszy element w i-tym wierszu;
        if ( min_row > 0 ) then begin
            odejmij min_row od każdego elementu w wierszu i;
            r := r + min_row;
        end
    end;
    for i := 1 to n do begin
        min_col := najmniejszy element w i-tej kolumnie;
        if ( min_col > 0 ) then begin
            odejmij min_col od każdego elementu w wierszu i;
            r := r + min_col;
        end
    end;
    return r;
end
```

Zmienne:

- *M* – macierz sąsiedztwa rozmiaru *n*
- *r* – suma odjętych wartości od wierszy i kolumn (jak wynika z poprzedniego lematu, jest to dolne oszacowanie na długość cyklu w *M*)

Przykład redukcji

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 11 & 16 & 28 & 42 \\ 17 & \infty & 44 & 31 & 27 \\ 24 & 33 & \infty & 6 & 15 \\ 13 & 19 & 41 & \infty & 21 \\ 42 & 28 & 25 & 36 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 17 & 31 \\ 0 & \infty & 27 & 14 & 10 \\ 18 & 27 & \infty & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 28 & \infty & 8 \\ 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 11 \\ 17 \\ 6 \\ 13 \\ 25 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 17 & 23 \\ 0 & \infty & 27 & 14 & 2 \\ 18 & 27 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 28 & \infty & 0 \\ 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \end{array}$$

$$\Leftarrow$$

$r = 11 + 17 + 6 + 13 + 25 + 8$
$= 80$

Stąd, do wartości LB potomków węzła dodamy 80

Kryterium wyboru łuku

procedureFindEdge(*M*, *r, c*)
begin
  max := – 1;
  for *i* := 1 **to** *n* **do**
    for *j* := 1 **to** *n* **do**
      if *M*[*i,j*] = 0 **then begin**
        min_r := wartość najmniejszego
          elementu w wierszu *i* z pominięciem *M*[*i,j*];
        min_c := wartość najmniejszego
          elementu w kolumnie *j* z pominięciem *M*[*i,j*];
        if *min_r* + *min_c* > *max* **then begin**
          max := *min_r* + *min_c*;
          (*r,c*) := (*i,j*);
        end
      end;
  return *max*;
end

Zmienne:
M – macierz sąsiedztwa
n – rozmiar *M*
(*r,c*) – łuk do podziału zbioru rozwiązań

Uwaga: Aby utworzyć potomków w drzewie przeszukiwań, wybieramy taki łuk, który powoduje największy wzrost dolnego oszacowania w prawym poddrzewie. Wartość, o którą wzrośnie *LB* wyznaczamy w zmiennej *max*.

Wybór łuku - przykład

$min\_r + min\_c = 5+3=8$

2+0=2

1+11=12

$$\text{Zredukow. } M = \begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ a & \infty & 0 & 5 & 17 & 23 \\ b & 0 & \infty & 27 & 14 & 2 \\ c & 18 & 27 & \infty & 0 & 1 \\ d & 0 & 6 & 28 & \infty & 0 \\ e & 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{array}$$

0+1=1

0+0=0

3+5=8

- do podziału zbioru rozwiązań wybieramy łuk (*c*,*d*)
- lewy potomek odpowiada wszystkim rozwiązaniom (cyklom) zawierającym łuk (*c*,*d*)
- prawy potomek zawiera wszystkie rozwiązania bez (*c*,*d*)

Tworzenie lewego syna

1. załóżmy, że wybrano łuk (*c,d*) w celu utworzenia potomków wierzchołka *v,*
2. lewy syn zawiera wówczas zbiór rozwiązań o tych samych ograniczeniach, co w przypadku *v* oraz dodatkowo zawierających łuk (*c,d*),
3. oznacza to, że możemy zmniejszyć rozmiar macierzy sąsiedztwa o 1 poprzez usunięcie *c*-tego wiersza i *d*-tej kolumny,
4. kolejne „uproszczenie" macierzy polega na *zablokowaniu* łuku (*d,c*) tzn. element macierzy na przecięciu *d*-tego wiersza i *c*-tej kolumny przyjmuje wartość „nieskończoność",
5. blokujemy również łuk, który tworzy cykl wraz z łukami dodanymi poprzednio do rozwiązania,
6. wartość *LB* wyliczamy dodając do wartości *LB* ojca liczbę *r* wyliczoną w procedurze Reduce

Lewy syn - przykład

Dla węzła wyjściowego v (tutaj korzeń drzewa) LB(v)=0

$$
\text{Zredukow. } M = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & \infty & 0 & 5 & 17 & 23 \\ b & 0 & \infty & 27 & 14 & 2 \\ c & 18 & 27 & \infty & 0 & 1 \\ d & 0 & 6 & 28 & \infty & 0 \\ e & 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{array}
$$

(usunięcie wiersza c i kolumny d)

$$
\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & e \\ \hline a & \infty & 0 & 5 & 23 \\ b & 0 & \infty & 27 & 2 \\ d & 0 & 6 & 28 & 0 \\ e & 17 & 5 & 0 & \infty \end{array}
$$

(zablokowanie łuku (d,c))

$$
\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & e \\ \hline a & \infty & 0 & 5 & 23 \\ b & 0 & \infty & 27 & 2 \\ d & 0 & 6 & \infty & 0 \\ e & 17 & 5 & 0 & \infty \end{array}
$$

(blokowanie łuków tworzących cykl z dotychczas wybranymi)

$$
\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & e \\ \hline a & \infty & 0 & 5 & 23 \\ b & 0 & \infty & 27 & 2 \\ d & 0 & 6 & \infty & 0 \\ e & 17 & 5 & 0 & \infty \end{array}
$$

Wartość oszacowania dolnego LB(v_l) dla lewego potomka wynosi zatem LB(v)+r = 0+80

Tworzenie prawego syna

1. załóżmy, że wybrano łuk (*c,d*) w celu utworzenia potomków wierzchołka *v,*
2. prawy syn zawiera wówczas zbiór rozwiązań o tych samych ograniczeniach, co w przypadku *v* oraz dodatkowo nie zawierających łuku (*c,d*),
3. blokujemy więc łuk (*c,d*) poprzez wpisanie wartości „nieskończoność” na przecięciu *c*-tego wiersza i *d*-tej kolumny w macierzy sąsiedztwa
4. nie następuje zmniejszenie rzędu macierzy sąsiedztwa w tym przypadku
5. wartość *LB* wyliczamy dodając do wartości *LB* ojca liczbę *r* wyliczoną w procedurze Reduce oraz wartość wartość *max* wyliczoną w procedurze FindEdge

Prawy syn - przykład

Dla węzła wyjściowego r (tutaj korzeń drzewa) LB(r)=0

$$\text{Zredukow. } M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 17 & 23 \\ 0 & \infty & 27 & 14 & 2 \\ 18 & 27 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 28 & \infty & 0 \\ 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Downarrow$ (zablokowanie łuku (c,d))

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 17 & 23 \\ 0 & \infty & 27 & 14 & 2 \\ 18 & 27 & \infty & \infty & 1 \\ 0 & 6 & 28 & \infty & 0 \\ 17 & 3 & 0 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Wartość oszacowania dolnego LB(r_p) dla prawego potomka wynosi zatem LB(r) + r + max = 0 + 80 + 12 = 92

Warunki końca rekurencji

Przypadek 1: wartość *LB* w wierzchołku *v* jest większa lub równa od najlepszego znalezionego dotychczas rozwiązania. Wówczas drzewo zakorzenione w *v* nie jest przeszukiwane.

Przypadek 2: *M* jest stopnia 2. Ma ona wówczas jedną z dwóch postaci:

$$M = \begin{bmatrix} +\infty & 0 \\ 0 & +\infty \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & +\infty \\ +\infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem bez względu na postać macierzy nie ma wyboru co do tego jakie łuki należy włączyć do końcowego rozwiązania. Jeśli kolumny odpowiadają wierzchołkom *w*,*x* natomiast wiersze *u*,*v* to:

- jeśli $M[u,w] = 0$, to do cyklu komiwojażera należą łuki (u,w), (v,x)
- jeśli $M[u,x] = 0$, to do cyklu komiwojażera należą łuki (v,w), (u,x)

Algorytm

Zmienne:
M – macierz sąsiedztwa
C – krawędzie należące do cyklu
LB – wartość dolnego oszacowania dla danego węzła

procedure TraverseTree(M, C, LB)
begin
  r := Reduce(M);
  if $LB + r < min\_sol$ **then**
    if $|C| = n - 2$ **then begin**
      dołącz dwa łuki do C i uaktualnij *min_sol* oraz zapamiętaj nowe rozwiązanie jeśli jest lepsze od dotychczasowych;
    end else begin
      max := FindEdge(M, c,d);
      TraverseTree(M^*, $C \cup \{(c,d)\}$, $LB + r$);
      if $LB + r + max < min\_sol$ **then begin**
        $M[c,d] := +\infty$;
        TraverseTree($M, C, LB + r$); $M[r,c] := 0$;
      end
    end;
  odtwórz macierz M do postaci sprzed redukcji;
end

M^* powstaje z M poprzez usunięcie c-tego wiersza, d-tej kolumny i zablokowania łuku (d,c) i łuków tworzących cykle z $C \cup \{(c,d)\}$

min_sol inicjalnie równe $+\infty$

Przykład

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \infty & 42 & 6 & 28 & 35 \\ 9 & \infty & 29 & 35 & 38 \\ 22 & 13 & \infty & 29 & 34 \\ 17 & 21 & 14 & \infty & 2 \\ 23 & 24 & 31 & 5 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

LB=0
r = 35
max=34

(*a*,*c*)

LB=35
r = 0
max=41

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & d & e \\ \hline b & 0 & \infty & 26 & 29 \\ c & \infty & 0 & 16 & 21 \\ d & 15 & 19 & \infty & 0 \\ e & 18 & 19 & 0 & \infty \end{array}$$

35+0+41 > *min_sol*

LB=69
r = 34
max=23

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & \infty & 14 & \infty & 0 & 7 \\ b & 0 & \infty & 8 & 26 & 29 \\ c & 9 & 0 & \infty & 16 & 21 \\ d & 15 & 19 & 0 & \infty & 0 \\ e & 18 & 19 & 14 & 0 & \infty \end{array}$$

69+34 > *min_sol*

69+34+23> *min_sol*

(*b*,*a*)

LB=35
r = 35
max=5

$$\begin{array}{c|ccc} & b & d & e \\ \hline c & \infty & 0 & 5 \\ d & 0 & \infty & 0 \\ e & 0 & 0 & \infty \end{array}$$

(*c*,*d*)

LB+*r*+*max* =
35+35+5=75>
min_sol=70

LB=70
r = 0

$$\begin{array}{c|cc} & b & e \\ \hline d & \infty & 0 \\ e & 0 & \infty \end{array}$$

$\boxed{min\_sol = 70}$

M – macierz wyjściowa (przed redukcją), natomiast we wszystkich potomkach pokazano macierze po redukcji

Złożoność

- Czas działania procedury Reduce wynosi $O(n^2)$
- Czas działania procedury FindEdge wynosi $O(n^3)$
- Zapamiętanie i odtworzenie macierzy to operacja rzędu $O(n^2)$
- Zapamiętywanie nowego najlepszego rozwiązania w czasie $O(n)$
- Oznacza to, że realizacja algorytmu TraverseTree w obrębie jednego węzła wymaga czasu $O(n^3)$
- Złożoność całego algorytmu można oszacować zatem przez $O(f(n)n^3)$, gdzie $f(n)$ jest liczbą węzłów drzewa poszukiwań odwiedzanych przez procedurę TraverseTree.
- Liczba wykonanych obliczeń zależy od konkretnych danych wejściowych i w pesymistycznym przypadku jest wykładnicza.