

Obliczalność i złożoność

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

sem. zimowy 2025/26

`inf.ug.edu.pl/~amb/oblicz`

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Obliczalność i złożoność sem. zimowy 2025/26 1 / 17

Wykład 05 Redukcje problemów

Redukcje problemów

- def.: język L redukuje się wielomianowo do języka K , $L \leq_p K$, jeśli istnieje funkcja f obliczalna przez deterministyczną maszynę Turinga w czasie wielomianowym taka, że $w \in L \Leftrightarrow f(w) \in K$
- problem SAT:
 - wejście: formuła boolowska w postaci koniunkcyjnej (CNF)
 - tzn. koniunkcja klauzul
 - klauzula to dyzjunkcja literałów
 - literał to zdanie atomowe lub jego negacja
 - spełnialność = istnienie wartościowania dającego *True*
- pokazaliśmy już, że każdy problem NP redukuje się wielomianowo do problemu SAT
- skoro sam SAT jest problemem NP jest więc NP-zupełny
- jest bardzo dużo innych problemów, pozornie odległych, NP-zupełnych, redukujących się nawzajem do siebie

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Obliczalność i złożoność sem. zimowy 2025/26 3 / 17

Maszyny Turinga, przykłady złożoności

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Obliczalność i złożoność sem. zimowy 2025/26 2 / 17

Wykład 05 Problem 3SAT

Problem 3SAT

- problem 3SAT posiada klauzule składające się zawsze z 3 literałów
- oczywiście maszyna rozwiązująca problem SAT rozwiązuje też 3SAT
- istnieje redukcja problemu SAT do 3SAT
- dw: dana klauzula $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k$, $k > 3$, x_i – literały
 - wprowadzamy nowe zmienne $y_2, y_3, \dots, y_{k-2}$
 - rozważamy koniunkcję klauzul $(x_1 \vee x_2 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_3 \vee y_3) \wedge \dots \wedge (\neg y_{i-1} \vee x_i \vee y_i) \wedge \dots \wedge (\neg y_{k-2} \vee x_{k-1} \vee x_k)$
 - jeśli np. $x_i = \text{True}$, to koniunkcja jest spełnialna, wystarczy przyjąć $y_j = \text{False}$ dla $j \geq i$ i $y_j = \text{True}$ dla $j < i$
 - jeśli wszystkie $x_i = \text{False}$, to koniunkcja jest niespełnialna
- klauzule trzech literałów nie wymagają żadnej operacji
 - klauzule dwóch czy jednego literału można sztucznie wydłużyć $(x_1 \vee x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg y)$ albo $(x_1 \vee y \vee y) \wedge (x_1 \vee \neg y \vee \neg y)$

Andrzej M. Borzyszkowski (Instytut Informatyki) Obliczalność i złożoność sem. zimowy 2025/26 4 / 17

Problem 2SAT

- tw.: problem 2SAT jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym (dokładniej, liniowym)
- wniosek: prawdopodobnie nie istnieje, a na pewno nie znamy redukcji problemu 3SAT do 2SAT
- dw.: budujemy graf którego wierzchołkami są $x, \neg x$ dla wszystkich zmiennych x występujących w formule
 - dla każdej klauzuli $x \vee y$ równoważnej $\neg x \Rightarrow y$ dodajemy dwie krawędzie grafu $\neg x \rightarrow y$ oraz $\neg y \rightarrow x$
 - graf skierowany dzieli się na składowe spójności, każda składowa spójności ma składowe silnej spójności
 - składowe silnej spójności można uporządkować topologicznie, tzn. krawędzie są od wierzchołków o niższych numerów do wyższych
 - złożoność algorytmów jest liniowa względem liczby krawędzi i wierzchołków

Przykłady problemów NP-zupełnych

- problem SAT
- problem 3SAT
- problem kliki w grafie – dla danego grafu G i liczby $k > 0$ rozstrzygnąć, czy istnieje klika (podgraf pełny grafu) zawierający k wierzchołków
- k -kolorowalność grafu – dla danego grafu $G = \langle V, E \rangle$ i liczby $k > 0$ rozstrzygnąć, czy istnieje kolorowanie $\pi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tzn. $\forall \langle u, v \rangle \in E. \pi(u) \neq \pi(v)$
- pokrycie wierzchołkowe – dany graf nieskierowany $G = \langle V, E \rangle$, zbiór wierzchołków $V_0 \subseteq V$ jest pokryciem wierzchołkowym jeśli zawiera końce wszystkich krawędzi, tzn. $\forall \{u, w\} \in E. u \in V_0 \vee w \in V_0$
problem: dla ustalonego grafu G i liczby k rozstrzygnąć, czy istnieje pokrycie wierzchołkowe $V_0, |V_0| \leq k$

Problem 2SAT, c.d.

- dla każdej zmiennej x zachodzi jeden z przypadków
 - x oraz $\neg x$ są w tej samej składowej silnej spójności, czyli mamy warunek $x \Leftrightarrow \neg x$, niespełnialny, jedna taka zmienna powoduje, że formuła jest niespełnialna
 - x i $\neg x$ występują w różnych składowych silnej spójności tej samej składowej spójności
czyli albo żądamy warunku $x \Rightarrow \neg x$ albo przeciwnego $\neg x \Rightarrow x$ jest on spełnialny, poprzednik implikacji musi być fałszywy
 - x oraz $\neg x$ występują w różnych składowych spójności, nie ma żadnego warunku determinującego wartość, klauzula również jest spełnialna
- wszystkie literały w jednej składowej silnej spójności otrzymają tę samą wartość
- numeracja liczbami 0 i 1 silnych składowych będzie zgodna z kierunkiem strzałek

Przykłady problemów NP-zupełnych, 2

- ścieżka Hamiltona – dany graf skierowany lub nieskierowany, rozstrzygnąć, czy istnieje ścieżka przechodząca przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz
- cykl Hamiltona – dodatkowo ścieżka zaczyna i kończy się w tym samym wierzchołku
- problem komiwojażera: dany jest zbiór miast $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ oraz odległości $d(c_i, c_j)$ dla $i, j = 1, \dots, n$ i ograniczenie b ; rozstrzygnąć, czy istnieje takie uporządkowanie miast $\{c'_1, \dots, c'_n\} = \{c_1, \dots, c_n\}$, że

$$\sum_{i=1}^n d(c'_i, c'_{i+1}) \leq b$$

- podział zbioru – dla skończonego zbioru $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ z wagami $w(c_i)$ rozstrzygnąć, czy istnieje podzbiór $C_0 \subset C$ spełniający warunek

$$\sum_{c \in C_0} w(c) = \sum_{c \in C \setminus C_0} w(c)$$

Przykłady problemów NP-zupełnych, 3

- problem plecakowy: dany jest zbiór elementów $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ z rozmiarami $s(a_i)$ oraz wartościami $w(a_i)$ oraz stałe b i y ; rozstrzygnąć, czy istnieje taki podzbiór $A_0 \subset A$, taki że

$$\sum_{a \in A_0} s(a) \leq b \text{ oraz } \sum_{a \in A_0} w(a) \geq y$$

- Maximum Coverage Problem:
dana liczba k , universe U , $b \leq |U|$ oraz rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(U)$, $|\mathcal{A}| = n$ rozstrzygnąć czy istnieje podrodzina $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ taka, że

$$|\mathcal{A}_0| = k \text{ oraz } \left| \bigcup \mathcal{A}_0 \right| \geq b$$

3SAT $\rightarrow$ kolorowalność

- dana formuła 3SAT Φ , liczba zmiennych n , liczba klauzul m , definiujemy graf G taki, że formuła jest spełnialna wtt. wierzchołki G można pokolorować $n + 1$ kolorami
- konstrukcja
 - dla każdej zmiennej x formuły trzy wierzchołki x , $\neg x$, $\bar{x}$
 - dla każdej klauzuli φ osobny wierzchołek
 - krawędzie: $\langle x, \neg x \rangle$ dla zmiennych x
 - $\langle x, \bar{y} \rangle$, $\langle \neg x, \bar{y} \rangle$, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ dla $x \neq y$
 - $\langle \neg x, \varphi \rangle$ jeśli $\neg x$ nie występuje w φ i podobnie dla x

Przykłady problemów NP-zupełnych, 4

- Extended String-to-string Correction Problem:
dane dwa napisy i liczba, $(S, T, b) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \mathbb{N}$ rozstrzygnąć, czy istnieje możliwość usunięcia pewnych liter z S oraz wykonania b przestawień, aby otrzymać T
np. $(aacb, abc, 1)$ ma rozwiązanie

3SAT $\rightarrow$ kolorowalność, cd.

- tw.: formuła Φ jest spełnialna wtt., gdy graf G można pokolorować $n + 1$ kolorami
- dw.:
 - wierzchołki $\bar{x}$ dla wszystkich n zmiennych potrzebują n kolorów,
 - x , $\neg x$ oraz $\bar{y}$ dla $x \neq y$ są połączone czyli potrzebują co najmniej $n + 1$ kolorów
 - G można pokolorować $n + 1$ kolorami, wtt. jeśli dla każdej zmiennej x jeden z wierzchołków x , $\neg x$ może mieć ten sam kolor co $\bar{x}$ – nazywamy go kolorem *specjalnym*
 - wierzchołkowi x lub $\neg x$ z kolorem specjalnym przypisujemy wartość *False*

3SAT → pokrycie wierzchołkowe

- dana formuła 3SAT, liczba zmiennych n , liczba klauzul m , definiujemy graf G i liczbę $k > 0$ taką, że formuła jest spełnialna wtt. graf G ma pokrycie mocy k
- konstrukcja
 - wierzchołki: x i $\neg x$ dla każdej zmiennej formuły oraz kopie dla każdego wystąpienia literała (x lub $\neg x$) w formule
 - krawędzie: $\{x, \neg x\}$ oraz
 - dla każdej klauzuli $x \vee y \vee z$ (ew. z negacjami) cały trójkąt
 - oraz połączenia x i $\neg x$ ze swoimi kopiami w klauzulach
 - razem jest $n + 6 \cdot m$ krawędzi
 - definiujemy $k = n + 2 \cdot m$

Ścieżki Hamiltona

- redukcja 3SAT do problemu Hamiltona – nie pokażemy jej tutaj
- redukcja problemu ścieżki Hamiltona dla grafu skierowanego do problemu dla grafu nieskierowanego
 - wierzchołki kopiujemy v^- , v^0 , v^+ z wyjątkiem żądanych końców i łączymy je krawędziami
 - jeśli $v \rightarrow u$ w grafie skierowanym, to łączymy wierzchołki v^+ i u^-
 - ścieżka odwiedzająca wszystkie wierzchołki w grafie nieskierowanym musi odwiedzić wszystkie wierzchołki, wyznacza jednocześnie kierunek przechodzenia

3SAT → pokrycie wierzchołkowe, c.d.

- jeśli formuła jest spełniona, do pokrycia wybieramy
 - wierzchołki zmiennych i negacji mające wartość *True*
 - co najmniej dwa wierzchołki z każdego trójkąta, niewybrany ma wartość *True*
 jest to pokrycie i ma $k = n + 2 \cdot m$ wierzchołków
- na odwrót, pokrycie k wierzchołkowe gwarantuje, że dwa wierzchołki w trójkątach są wybrane, niewybrane wierzchołki dają wartościowanie spełniające formułę
- przykład (tendancyjny) formuły $(x \vee y \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee y)$
 - trzy trójkąty, dwie krawędzie dla zmiennych i krawędzie łączące
 - jedyne wartościowanie: $y = \text{True}$, $x = \text{False}$

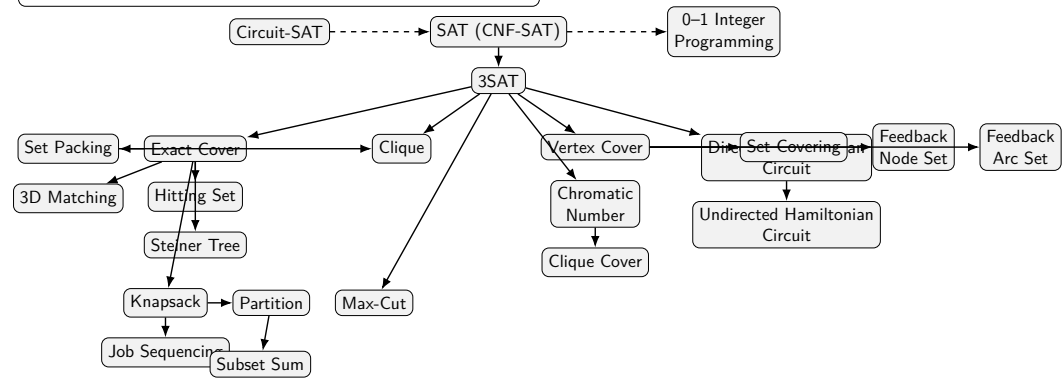
Lista problemów NP-zupełnych

- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems
 - Graphs and hypergraphs
 - Mathematical programming
 - Formal languages and string processing
 - Games and puzzles
 - Other
- 166 problemów w grudniu 2025: „This is a dynamic list and may never be able to satisfy particular standards for completeness”
- https://en.wikipedia.org/wiki/Karp%27s_21_NP-complete_problems
Karp, Richard M. (1972). *Reducibility Among Combinatorial Problems*. In R. E. Miller; J. W. Thatcher; J.D. Bohlinger (eds.). *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum. pp. 85–103.

Karp's 21 NP-complete problems

Konwencja:

- Krawędź $A \rightarrow B$ oznacza redukcję wielomianową $A \leq_p B$.
- Układ inspirowany klasycznymi zestawieniami (Karp 1972; Wikipedia; UMass).



Bibliografia: Karp (1972); Wikipedia „Karp's 21 NP-complete problems”; UMass CS501 (lec24).