

Logika dla informatyków

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

inf.ug.edu.pl/~amb

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 1 / 20

Semantyka klasycznego rachunku zdań

Semantyka — logika klasyczna

- semantyka = znaczenie
- wartości logiczne: **T** (prawda) i **F** (fałsz)
- znaczenie *zdania atomowego* — (jego) wartość logiczna
- znaczenie *formuły złożonej* — wartość logiczna wynikająca z wartości (zawartych w niej) zdań atomowych oraz interpretacji *spójników* (por. algebra logiki Boole'a)

Definicja

Niech $atom(\varphi)$ — zbiór wszystkich zdań atomowych formuły φ
Wartościowanie (model) formuły φ to dowolna funkcja

$$v : atom(\varphi) \rightarrow \{T, F\}$$

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 3 / 20

Semantyka klasycznego rachunku zdań

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 2 / 20

Semantyka klasycznego rachunku zdań

Interpretacja spójników

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

φ	$\neg \varphi$	$\perp$
T	F	F
F	T	

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 4 / 20

Przykład wartościowania

$$\varphi = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

- $\text{atom}(\varphi) = \{p, q\}$ — cztery możliwe wartościowania
- w ogólności — $2^{|\text{atom}(\varphi)|}$ wartościowań

Indukcja matematyczna – różne formy

- Postać podstawowa: jeśli Φ jest własnością liczb naturalnych, t.ż.
 - $\Phi(0)$ oraz
 - zachodzi implikacja „ $\Phi(n)$ pociąga $\Phi(n+1)$ ”,
 to zdanie Φ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych
- Postać wygodniejsza:

jeśli pokażemy implikację „ $(\forall i < n. \Phi(i))$ pociąga $\Phi(n)$ ”,
to Φ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych
- Indukcja strukturalna: jeśli Φ jest zdaniem dotyczącym obiektów „strukturalnych”, które są zbudowane ze skończonej liczby mniejszych części i jeśli udowodnimy
 - Φ zachodzi dla obiektów atomowych,
 - Φ zachodzi dla obiektów złożonych przy założeniu, że zachodzi dla wszystkich podobiektów (założenie indukcyjne),
 to wówczas zdanie Φ jest prawdziwe dla wszystkich obiektów

Implikacja semantyczna / poprawność reguł wnioskowania

Definicja (Implikacja semantyczna)

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ oznacza

jeśli w pewnym wartościowaniu wszystkie formuły φ_i mają znaczenie **T** to i ψ ma znaczenie **T**

- $p \wedge q \models p$: sprawdzamy w tabelce
- $p \vee q \not\models p$: bo istnieje v , w którym $v(p) = \mathbf{F}$ i $v(q) = \mathbf{T}$
- $p \vee q, \neg q \models p$: jedyny model to $v(p) = \mathbf{T}$ i $v(q) = \mathbf{F}$
- $\models q \vee \neg q$: formuła $q \vee \neg q$ jest prawdziwa dla dowolnego v

Twierdzenie (Poprawność systemu wnioskowania)

Jeśli $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, to $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$

Przykład zastosowania indukcji strukturalnej

Twierdzenie

Liczby prawych i lewych nawiasów w każdej formule rachunku zdań są równe.

Dowód

Formuła φ może być jednej z dwóch postaci:

- formuła atomowa p — teza spełniona (0 nawiasów)
 - formuła złożona: $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $(\neg \varphi_1)$.
założenie indukcyjne: podformuły φ_1 oraz φ_2 mają tyle samo lewych i prawych nawiasów.
Formuła φ ma wszystkie nawiasy swoich podformuł i dodatkowo jedną parę na zewnątrz, więc liczby nawiasów w φ są równe.
- Na mocy twierdzenia o indukcji twierdzenie powyższe zachodzi. $\square$

Poprawność reguł rachunku zdań

Dowód

Indukcja względem długości wyводу $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

- Najkrótszy dowód to $\psi \vdash \psi$. Wówczas oczywiście $\psi \models \psi$.
- Jeśli dowód kończył się zastosowaniem reguły $\wedge i$, to $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ i część tego dowodu jest dowodem formuł ψ_1 oraz ψ_2 . Z założenia: $\Gamma \models \psi_1$ oraz $\Gamma \models \psi_2$ a więc $\Gamma \models \psi$.
- Jeśli jako ostatnią zastosowano regułę $\vee e$, to znaczy, że we wcześniejszej fazie
 - udowodniono formułę postaci $\psi_1 \vee \psi_2$ z przesłanek ze zbioru Γ ,
 - udowodniono ψ na podstawie przesłanek z Γ oraz ψ_1 ,
 - udowodniono ψ na podstawie przesłanek z Γ oraz ψ_2 .

Na podstawie założenia indukcyjnego $\Gamma \models \psi_1 \vee \psi_2$, $\Gamma, \psi_1 \models \psi$ oraz $\Gamma, \psi_2 \models \psi$. A więc $\Gamma \models \psi$.

- Podobnie analizujemy pozostałe reguły rachunku zdań $\square$

Pełność reguł rachunku zdań c.d.

Definicja

Formuła ψ jest tautologią jeśli $\models \psi$

tzn. ψ jest tautologią jeśli jest prawdziwa dla dowolnego wartościowania występujących w niej formuł atomowych

Szkic dowodu

- 1 zakładamy, że $\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$ jest tautologią
- 2 uzasadniamy, że $\varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$ da się udowodnić
- 3 wnioskujemy, że $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ da się udowodnić

Uwaga

Jak się okazuje jedynym trudnym krokiem jest krok 2.

Nie będziemy tego dowodzić, wystarczy pamiętać samo twierdzenie.

Pełność reguł rachunku zdań

Twierdzenie (O pełności)

Jeśli $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, to $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$

tzn. jeśli zachodzi implikacja semantyczna, to istnieje formalny wywód formuły ze zbioru przesłanek

Semantyka intuicjonistycznego rachunku zdań

Logika intuicjonistyczna

- głównym przykładem zdania, które nie ma dowodu używającego reguł logiki intuicjonistycznej jest $\varphi = p \vee \neg p$
- nie wiemy, czy prawdziwa jest podformuła p czy raczej $\neg p$
- niemniej w każdym wartościowaniu $v : \{p\} \rightarrow \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}$ wartością φ jest $\mathbf{T}$
- semantyka logiki intuicjonistycznej musi uwzględniać powyższą niepewność

Interpretacja w strukturze Kripkego

Definicja

- $u \Vdash p \Leftrightarrow p \in \tau(u)$
- $u \Vdash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow u \Vdash \varphi \text{ i } u \Vdash \psi$
- $u \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow u \Vdash \varphi \text{ lub } u \Vdash \psi$
- $u \Vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \text{dla wszystkich } v \geq u \text{ jeśli } v \Vdash \varphi \text{ to } v \Vdash \psi$
- $u \Vdash \neg \varphi \Leftrightarrow \text{dla wszystkich } v \geq u \text{ zachodzi } v \nVdash \varphi$

- $\neg \varphi$ można uważać za skrót od $\varphi \rightarrow \perp$ i interpretować $v \Vdash \perp$ jako rzecz niemożliwą

Uwaga

Relacja $\Vdash$ nazywana jest **relacją wymuszania**,
 $u \Vdash \varphi$ czytamy „w stanie u φ musi być prawdziwe”

Struktury Kripkego

Definicja (struktura Kripkego)

Niech P oznacza zbiór zdań atomowych.

Intuicjonistyczna struktura Kripkego dla P to trójka $\langle W, \leq, \tau \rangle$, gdzie $\langle W, \leq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, a $\tau : W \rightarrow \mathcal{P}(P)$ jest funkcją taką, że jeśli $u \leq v$ to $\tau(u) \subseteq \tau(v)$.

- szczególnym przypadkiem jest zbiór W jednoelementowy, wówczas τ określa podzbiór zdań atomowych – interpretujemy je jako prawdziwe
- czyli τ jest wartościowaniem, jest to model w logice klasycznej

Własności relacji wymuszania

Twierdzenie (Monotoniczność)

Dla dowolnej formuły φ , dowolnej struktury Kripkego $\langle W, \leq, \tau \rangle$ jeśli $u \Vdash \varphi$ i $u \leq v$, to $v \Vdash \varphi$, gdzie $u, v \in W$.

Dowód

indukcja strukturalna:

- φ jest zdaniem atomowym: monotoniczność τ ,
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$: twierdzenie zachodzi dla podformuł (założenie indukcyjne) więc i dla formuły φ ,
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$: analogicznie,
- $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: wiadomo, że $u \Vdash \varphi$ i $u \leq v$. Niech $v \leq v'$ i $v' \Vdash \varphi_1$. Wówczas $v' \Vdash \varphi_2$. Czyli $v \Vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$.
- negacja jest szczególnym przypadkiem implikacji

Tautologia logiki intuicjonistycznej

Definicja (Tautologia)

ψ jest tautologią (notacja: $\Vdash \psi$) w.t.w. dla każdej struktury Kripkego $\langle W, \leq, \tau \rangle$ oraz każdego stanu $u \in W$ zachodzi $u \Vdash \psi$

- jednopunktowe struktury Kripkego wystarczają do semantyki logiki klasycznej
- czyli tautologia logiki intuicjonistycznej jest również tautologią logiki klasycznej
- ale nie na odwrót

Uwaga: okaże się, że wystarczy rozpatrywać struktury Kripkego, które są drzewami. Będziemy się pytać wyłącznie, czy formuła zachodzi w korzeniu.

Poprawność i pełność systemu wnioskowania logiki intuicjonistycznej

Definicja (Intuicjonistyczna implikacja semantyczna)

$\Gamma \Vdash \varphi$ w.t.w.

gdy dla każdej struktury Kripkego $\langle W, \leq, \tau \rangle$ i każdego $u \in W$, jeśli $u \Vdash \psi$ dla wszystkich $\psi \in \Gamma$, to również $u \Vdash \varphi$

Twierdzenie

Reguły wnioskowania intuicjonistycznego rachunku zdań są poprawne i pełne względem klasy wszystkich struktur Kripkego:

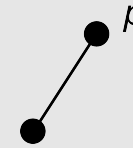
$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{w.t.w.} \quad \Gamma \Vdash \varphi$$

- dowód jest poza zakresem obecnego wykładu.

Najważniejsza nie-tautologia: $p \vee \neg p$

Przykład

$p \vee \neg p$ nie jest tautologią intuicjonistycznego rachunku zdań



Prawdziwość formuły $p \vee \neg p$ nie jest wymuszona w korzeniu

p nie musi być prawdziwe, bo nie jest zaznaczone

$\neg p$ nie musi być prawdziwe, bo w dalszym stanie prawdziwe jest p

- logika klasyczna: $p \vee \neg p$ jest tautologią, choć ani p ani $\neg p$ nie muszą być prawdą
- logika intuicjonistyczna: i właśnie dlatego $p \vee \neg p$ nie jest tautologią

Poprawność i pełność c.d.

Twierdzenie (Modele skończone)

Reguły wnioskowania intuicjonistycznego rachunku zdań są pełne względem klasy wszystkich struktur Kripkego, których zbiór stanów jest drzewem skończonym.

Wniosek

Szukając „konstruktywnego kontrprzykładu” wystarczy ograniczyć się do drzew skończonych.