

Logika dla informatyków

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

inf.ug.edu.pl/~amb

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 1 / 5

Dalsze zagadnienia

Równoważność dowodowa

Definicja

φ jest równoważna ψ jeśli $\varphi \dashv\vdash \psi$ (tzn. istnieją dwa wywody w przeciwne strony).

uwaga: równoważnie: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Przykłady (ważnych) równoważnych formuł

- $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg q \vee \neg p$ oraz $\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg q \wedge \neg p$ (prawa de Morgana)
- ogólniej: $(p \wedge q) \rightarrow r \dashv\vdash (q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$ oraz $(p \vee q) \rightarrow r \dashv\vdash (q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow r)$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg q \rightarrow \neg p$ (transpozycja twierdzenia)
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$ (implikacja może być uważana za spójnik pochodny)
- $p \wedge q \rightarrow r \dashv\vdash p \rightarrow q \rightarrow r$

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 3 / 5

Naturalna dedukcja, c.d.

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 2 / 5

Dalsze zagadnienia

Intuicjonizm a dowody niewprost

- równoważne są reguły:
 - eliminacja podwójnej negacji
 - dowód niewprost
 - prawo wyłączonego środka
- dokładniej, jeśli do reguł naturalnej dedukcji dorzucimy dowolną z powyższych, to pozostałe będą regułami pochodnymi
- logika intuicjonistyczna odrzuca wszystkie te reguły

Andrzej Borzyszkowski (Instytut Informatyki I Logika dla informatyków 4 / 5

Przykład dowodu niezgodnego z logiką intuicjonistyczną

Twierdzenie

Istnieją dwie liczby niewymierne x oraz y takie, że potęga x^y jest liczbą wymierną.

Dowód.

Niech $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Wiadomo(już starożytni Grecy...), że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Jeśli z jest liczbą wymierną, to $x = y = \sqrt{2}$ są liczbami, o które chodzi w twierdzeniu.

Jeśli z jest liczbą niewymierną, to $x = z$ oraz $y = \sqrt{2}$ są poszukiwanymi liczbami. $\square$

I nadal nie wiemy jakie to konkretnie liczby niewymierne dają liczbę wymierną w potęgzie!