

Logika dla informatyków

Andrzej M. Borzyszkowski

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

`inf.ug.edu.pl/~amb`

Rachunek predykatów

- rachunek zdań dotyczy budowy zdań złożonych ze zdań atomowych
- ale skąd się biorą zdania atomowe?

Przykłady (lekko tendencyjne) zdań atomowych:

- Alicja jest studentką
- każdy student lubi się czegoś uczyć
- Alicja lubi się czegoś uczyć
- Alicja lubi się uczyć języka Java
- niektórzy studenci nie lubią się uczyć języka Java

Rachunek predykatów

Rachunek predykatów, c.d.

- elementy: Alicja, język Java
- predykaty (relacje): jest studentką, lubi się uczyć
- kwantyfikatory: każdy, czegoś/niektórzy
- jest studentką(Alicja)
- $\forall x$ (jest studentką(x) $\rightarrow \exists y$ lubi się uczyć(x, y))
- jest studentką(Alicja) $\wedge \exists y$ lubi się uczyć(Alicja, y)
- jest studentką(Alicja) $\wedge$ lubi się uczyć(Alicja, język Java)
- $\exists x$ (jest studentką(x) $\wedge \neg$ lubi się uczyć(x , język Java))

Zależności pomiędzy zdaniem

- jeśli Alicja jest studentką i każdy student lubi się czegoś uczyć, to dotyczy to i Alicji
- jeśli każdy student lubi czegoś się uczyć, to znaczy, że nie istnieje taki, który niczego nie chciałby się uczyć
- jeśli istnieje student, który nie lubi Javy, ale Alicja lubi, to znaczy, że Alicja nie jest jedyną studentką
- itd.

Podobnie jak w rachunku zdań

- najpierw reguły dowodzenia: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$
- później semantyka (znaczenie)

Język formalny

- formuły, ale i termy oznaczające elementy
- predefiniowane zbiory symboli relacyjnych $\mathcal{P}$ i funkcyjnych $\mathcal{F}$
- każdy symbol ma *arność* tzn. liczbę argumentów
- nie rozważamy tu typowania, tzn. nie rozważamy typów dla różnych elementów
- sygnatura = zbiory $\mathcal{P}$ i $\mathcal{F}$ wraz z definicjami arności

Funkcje

- każda funkcja jest relacją
- ale relacje funkcyjne warto zapisywać inaczej
- Alicja i Bolek mają wspólną babcię (ze strony matki):
 $\forall x \forall y \forall z \forall t (matka(Alicja, x) \wedge matka(x, y) \wedge matka(Bolek, z) \wedge matka(z, t) \rightarrow y = t)$
- ale matka jest tylko jedna: $matka(Alicja) = x$
- $matka(matka(Alicja)) = matka(matka(Bolek))$

Termy

- gramatyka (w postaci Backusa Naura)

$$t ::= x \mid c \mid f(t, \dots, t)$$

- x jest zmienną (z nieskończonego zbioru zmiennych)
- c jest symbolem stałej, tzn. funkcji z zerową liczbą argumentów
- f jest symbolem funkcji, liczba termów w nawiasie jest równa jej arności

Przykład

- *arytmetyka*: $\{0, +, -, *, /\}$
- *teoria mnogości*: $\{\emptyset, \setminus, \cup, \cap\}$
- *rachunek zdań*: $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$

Formuły

- gramatyka (w postaci Backusa Naura)

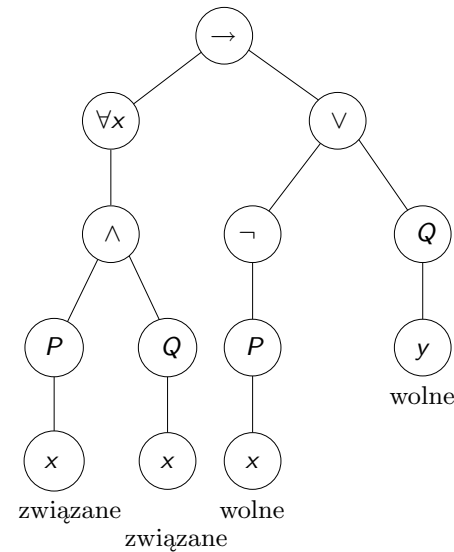
$$\varphi ::= P(t, \dots, t) \mid t = t \mid (\neg \varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\forall x. \varphi) \mid (\exists x. \varphi)$$

- t są termami oznaczającymi elementy, P jest symbolem relacyjnym, liczba termów w nawiasie jest równa arności symbolu
- x jest zmienną przebiegającą elementy
- można się umówić by opuszczać zbędne nawiasy, np. zewnętrzne
- operatory $\forall x$ oraz $\exists x$ wiążą podobnie jak negacja, tzn. najmocniej

Podstawienie

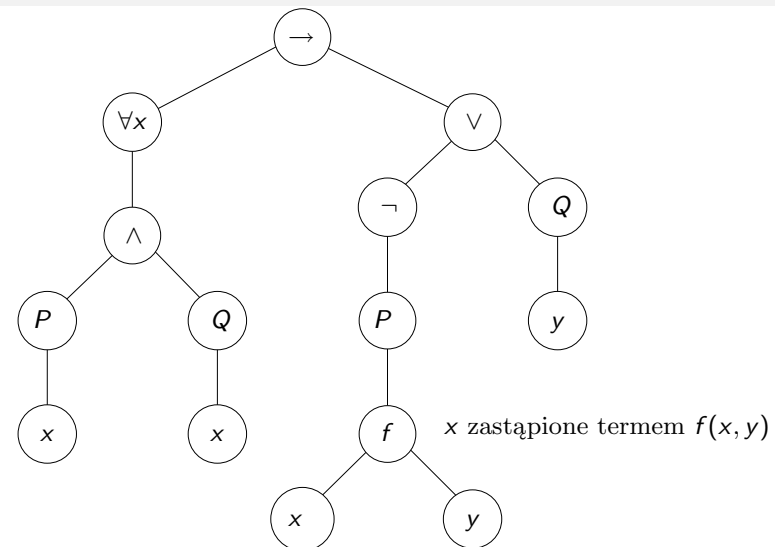
- dane: formuła φ , nazwa zmiennej x , term t
- podstawienie t za x jest operacją produkującą nową formułę $\varphi[t/x]$
- podstawienie dotyczy *jedynie* wolnych wystąpień zmiennej x
- w pierwszym przybliżeniu odpowiada zamianie wszystkich wolnych wystąpień zmiennej w formule odpowiednim termem

Wiązanie zmiennej



- $\varphi = \forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg P(x) \vee Q(y)$
- wystąpienie zmiennej w formule φ jest *związane*, jeśli w drzewie formuły φ powyżej wystąpienia zmiennej występuje operator wiążący tę zmienną
- operator wiąże wszystkie *wolne* wystąpienia swojej zmiennej w podformule
- $\forall x.(\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg P(x) \vee Q(y))$ pierwszy kwantyfikator wiąże jedynie ostatnie x

Podstawienie – przykład



- podstawienie $[f(x, y)/x]$ wyprodukuje
- $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg P(f(x, y)) \vee Q(y)$

Podstawienie – warunek konieczny

- gdyby formuła z przykładu była częścią większej całości, i powyżej znajdowałby się operator wiążący zmienną y ,
- wówczas przed podstawieniem wiązałyby tylko jedno wystąpienie y ,
- a w formule z poprzedniego slajdu wiązałyby dwa wystąpienia y (przechwycenie dodatkowego wystąpienia)

Definicja

- term t jest wolny dla x w formule φ w.t.w. żadne wolne wystąpienie x w φ nie leży w zasięgu wiązania żadnej ze zmiennych wolnych w t
- podstawienie $\varphi[t/x]$ jest wykonywane tylko jeśli term t jest wolny dla x

Dedukcja naturalna

- wszystkie reguły dowodowe rachunku zdań pozostają w mocy
- dodatkowe reguły dotyczą predykatu równości oraz kwantyfikatorów
- podobnie do rachunku predykatów występują reguły wprowadzania i eliminacji
- intuicjonistyczny rachunek predykatów nie obejmuje prawa wyłączzonego środka – klasyczny obejmuje i tę regułę

- wprowadzanie równości:
$$\frac{}{t = t} (=i)$$

- eliminacja równości:
$$\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} (=e)$$

ta reguła może być zastosowana wyłącznie jeśli t_1 i t_2 są wolne dla x w φ

Podstawienie – formalna definicja

$$x[t/x] = t$$

$$y[t/x] = y \quad \text{o ile } x \neq y$$

$$c[t/x] = c$$

$$f(t_1, \dots, t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$$

$$P(t_1, \dots, t_n)[t/x] = P(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$$

$$(t_1 = t_2)[t/x] = (t_1[t/x] = t_2[t/x])$$

$$(\neg \varphi)[t/x] = (\neg \varphi[t/x])$$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \wedge \varphi_2[t/x])$$

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \vee \varphi_2[t/x])$$

$$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \rightarrow \varphi_2[t/x])$$

$$(\forall x \varphi)[t/x] = (\forall x \varphi)$$

$$(\forall y \varphi)[t/x] = (\forall y \varphi[t/x]) \quad \text{o ile } x \neq y \text{ i } t \text{ nie ma wolnego } y$$

$$(\exists x \varphi)[t/x] = (\exists x \varphi)$$

$$(\exists y \varphi)[t/x] = (\exists y \varphi[t/x]) \quad \text{o ile } x \neq y \text{ i } t \text{ nie ma wolnego } y$$

Równość

- zwrotność: jest regułą
- symetria: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

$$\begin{array}{lll} 1 & t_1 = t_2 & \text{przesłanka} \\ 2 & t_1 = t_1 & (=i) \\ 3 & t_2 = t_1 & (=e) \quad 1, 2 \end{array}$$

dla formuły φ równej $x = t_1$

- przechodniość: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

$$\begin{array}{lll} 1 & t_1 = t_2 & \text{przesłanka} \\ 2 & t_2 = t_3 & \text{przesłanka} \\ 3 & t_1 = t_3 & (=e) \quad 2, 1 \end{array}$$

dla formuły φ równej $t_1 = x$

Rachunek predykatów – dedukcja naturalna

Wprowadzanie kwantyfikatora ogólnego

- podobnie jak w przypadku wprowadzania koniunkcji, mamy mnóstwo przesłanek postaci φ

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}{\forall x\varphi} (\forall i)$$

- wiemy, że φ zachodzi, i że zmienna w φ jest całkowicie niezależna od świata zewnętrznego
- technicznie, wybieramy *świeżą* zmienną dla φ

Eliminacja kwantyfikatora ogólnego

- skoro φ jest prawdziwe dla każdego x , to również dla konkretnego termu t

$$\frac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]} (\forall e)$$

- zapis podstawienia $\varphi[t/x]$ oznacza m.in., że t jest wolny dla x w φ , czyli podstawienie jest wykonalne

Uwaga

- np. w $\varphi = \exists y(x < y)$ podstawienie $[y/x]$ jest niewykonalne – $\forall x\exists y(x < y)$ jest prawdą, $\exists y(y < y)$ jest fałszem
- $\forall x\varphi$ uogólnia pojęcie koniunkcji, $\varphi[t/x]$ jest jednym z (potencjalnie) nieskończenie wielu „czynników” tej koniunkcji
- nie jest to reguła, a raczej schemat reguł, do zastosowania do prawie dowolnego t

Przykład dowodu

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall xP(x) \vdash \forall xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	przesłanka
2	$\forall xP(x)$	przesłanka
3	$x_0 \quad P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall e \ 1$
4	$P(x_0)$	$\forall e \ 2$
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow e \ 3,4$
6	$\forall xQ(x)$	$\forall i \ 3-5$

Wprowadzanie kwantyfikatora egzystencjalnego

- $\exists x\varphi$ uogólnia pojęcie dyzjunkcji, $\varphi[t/x]$ jest jednym z (potencjalnie) nieskończenie wielu jej „składników”
- ale czy istnieje *choć jeden*?
- reguła wprowadzania analogiczna do wprowadzania dyzjunkcji
- jest to schemat reguł, odrębna reguła dla każdego termu t

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi} (\exists i)$$

- uwaga: zapis $\varphi[t/x]$ sugeruje, że φ, t, x są znane – wcale tak nie jest
- jeśli wiemy, że $2 + 2 = 4$, to można wyprowadzić $\exists x(x + x = 4)$, albo $\exists x(2 + 2 = x)$, albo $\exists x(x + 2 = 4)$, albo $\exists x(2 + x = 4)$, albo $\exists x(x = 4)$, albo $\exists x(2 + 2 = 4)$
- to ostatnie wymaga wyjaśnień

Niepuste dziedziny c.d.

- przykład: dowód dla $\forall x\varphi \vdash \exists x\varphi$
 - 1 $\forall x\varphi$ przesłanka
 - 2 $\varphi[x/x]$ $\forall e$ 1
 - 3 $\exists x\varphi$ $\exists i$ 2
- jeśli każdy krasnoludek nosi czapkę, to istnieje krasnoludek, który nosi czapkę
- φ – „nosi czapkę”, x przebiega zbiór krasnoludków
- bezprawnie – dziedzina jest pusta
- w powyższym dowodzie term x ma oznaczać coś istniejącego

Dziedziny – puste czy niepuste?

- termy mają znaczenie jako elementy pewnych dziedzin
- są dwa podejścia do teorii logiki II rzędu
 - można zakładać, że dziedziny są niepuste
 - lub nie zakładać
- jest jasne, że krasnoludki nie istnieją (powiedzmy. . .)
- ale czy każdy każdy krasnoludek nosi czapkę?
 - to prawda, jeśli dopuszczamy, by dziedzina była pusta, a stwierdzenie prawdziwe z powodu braku kontrprzykładu
 - to nieprawda, jeśli niejawnie zakładamy, że zdanie powyższe sugeruje istnienie
- reguła wprowadzania $(\exists i)$ zakłada, że term t coś oznacza
- JAPE stosuje słowo kluczowe „actual” dla oznaczenia, że zmienna oznacza coś istniejącego w dziedzinie

Eliminacja kwantyfikatora egzystencjalnego

- podobnie jak dla binarnej dyzjunkcji, trzeba udowodnić pewną formułę przy każdych możliwych założeniach

$$\frac{\exists x\varphi \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\psi} (\exists e)$$

Przykład c.d.

- jeśli istnieją krasnoludki i każdy krasnoludek nosi czapkę, to czapki są potrzebne – istnieją krasnoludki i właśnie noszą czapki
- P – jest krasnoludkiem, Q – nosi czapkę, x przebiega zbiór krasnoludków

1	$\exists xP(x)$	przesłanka
2	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	przesłanka
3	$x0 \quad P(x0)$	założenie
4	$P(x0) \rightarrow Q(x0)$	$\forall e \ 2$
5	$Q(x0)$	$\rightarrow e \ 4,3$
6	$\exists xQ(x)$	$\exists i \ 5$
7	$\exists xQ(x)$	$\exists e \ 1,3-6$

Fałszywy „dowód”

1	$\exists xP(x)$	przesłanka
2	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	przesłanka
3	$x0$	
4	$x0 \quad P(x0)$	założenie
5	$P(x0) \rightarrow Q(x0)$	$\forall e \ 2$
6	$Q(x0)$	$\rightarrow e \ 5,4$
7	$Q(x0)$	$\exists e \ 1,4-6$
8	$\forall xQ(x)$	$\forall i \ 3-7$

- np. P – liczba jest podzielna przez 4, Q – jest parzysta
- nie wolno zadeklarować zmiennej $x0$ powtórnie, musi być inna
- ale dowód używający innej zmiennej $x1$, nie będzie dowodem używającym „dowolnej” zmiennej $x0$

Inny przykład

1	$\exists xP(x)$	przesłanka
2	$\forall x\forall y(P(x) \rightarrow Q(y))$	przesłanka
3	$y0$	
4	$x0 \quad P(x0)$	założenie
5	$\forall y(P(x0) \rightarrow Q(y))$	$\forall e \ 2$
6	$P(x0) \rightarrow Q(y0)$	$\forall e \ 5$
7	$Q(y0)$	$\rightarrow e \ 6,4$
8	$Q(y0)$	$\exists e \ 1,4-7$
9	$\forall yQ(y)$	$\forall i \ 3-8$
10		

Równoważności z kwantyfikatorami

Twierdzenie

- prawa de Morgana:** $\neg(\forall x\varphi) \vdash \exists x(\neg\varphi) \quad \neg(\exists x\varphi) \vdash \forall x(\neg\varphi)$
- przy założeniu, że zmienna x nie jest wolna w formule ψ**

$\forall x(\psi \wedge \varphi) \vdash \psi \wedge \forall x\varphi$	$\exists x(\psi \wedge \varphi) \vdash \psi \wedge \exists x\varphi$
$\forall x(\psi \vee \varphi) \vdash \psi \vee \forall x\varphi$	$\exists x(\psi \vee \varphi) \vdash \psi \vee \exists x\varphi$
$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \psi \rightarrow \forall x\varphi$	$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \vdash \psi \rightarrow \exists x\varphi$
$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \exists x\varphi \rightarrow \psi$	$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x\varphi \rightarrow \psi$
- uwaga na zmianę kwantyfikatorów w ostatnim wierszu**
- $\forall x(\psi \wedge \varphi) \vdash \forall x\psi \wedge \forall x\varphi$
 $\exists x(\psi \vee \varphi) \vdash \exists x\psi \vee \exists x\varphi$
- uogólniają niektóre z powyższych równoważności**
- analogiczne uogólnienia pozostałych nie są prawdziwe**

$\forall x(\psi \vee \varphi) \vdash \forall x\psi \vee \forall x\varphi$
$\exists x(\psi \wedge \varphi) \vdash \exists x\psi \wedge \exists x\varphi$